Travaux mathématiques
Fascicule XV, 2004
197-209

Les sciences mathématiques à l'aube du 21^{e} siècle

Jean-Pierre Kahane

Nous sommes bientôt à mi-parcours du cycle de conférences que vous avez intitulé "Les sciences à l'aube du 21$^{\text{ième}}$ siècle". Tous les conférenciers, sauf un, ont fait un effort d'imagination pour que le titre de leur conférence, tout en s'inscrivant dans cette perspective, donne une certaine idée du contenu. La conférence qui fait exception est la mienne. Ayant à parler de mathématiques, je me suis contenté d'ajouter "mathématiques" au titre du cycle, et d'annoncer paresseusement "les sciences mathématiques à l'aube du 21$^{\text{ième}}$ siècle". Ce faisant, j'ai élargi le sujet largement au-delà de mon champ de compétence. Mais il me semble plus intéressant de débattre avec vous d'un sujet très étendu que d'un objet trop restreint.

La mathématique est la plus ancienne des sciences, et la mathématique d'il y a 200 ans conserve un intérêt actuel. Mais elle s'est transformée et enrichie au cours des siècles, et son histoire au cours du 20$^{\text{ième}}$ siècle est une suite d'explosions qui rappelle un feu d'artifice. Un aspect de cette histoire est bien connu : c'est la réforme de l'enseignement des mathématiques des années 1960. Cependant il ne prend sens que si l'on se replace dans le contexte de l'époque. Les époques changent, et les mathématiques avec elles. Le thème de mon exposé est que, pour l'essentiel, nous ne sommes plus aujourd'hui à l'âge de la mathématique, ni même des mathématiques, ni même des mathématiques pures et appliquées, mais à l'âge des sciences mathématiques. J'expliquerai ce que j'entends par là, et ce sera la justification de mon titre.

Un regard en arrière sera nécessaire, et aussi l'examen, sur exemples, de ce que sont les sciences mathématiques aujourd'hui. Mais le titre, "l'aube du 21^{e} siècle" invite à regarder l'avenir, c'est-à-dire l'avenir incertain des sciences mathématiques dans le cadre d'un avenir incertain pour l'humanité elle-même. Je me placerai dans la perspective optimiste de la survie et du développement de l'humanité, et de ce qu'elle implique.

A travers l'histoire des mathématiques deux faces opposées apparaissent : la permanence, et le changement.

J'insisterai d'abord sur la permanence des notions et des démarches. Les nombres premiers d'Euclide, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... sont toujours nos nombres premiers, et la preuve que donne Euclide du fait qu'il y en a une infinité est une excellente preuve, toujours valable et toujours frappante. Le cercle d'Euclide est toujours notre cercle, le triangle d'Euclide est toujours notre triangle, la sphère d'Euclide est toujours notre sphère etc... Les démonstrations d'Euclide sont toujours des modèles de démonstration. Un collègue physicien déclarait récemment, dans une séance de travail de l'Académie des Sciences consacrée à l'enseignement des mathématiques en relation avec les autres disciplines, que pour lui rien n'était plus beau, malgré son inutilité, que la preuve par Euclide de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Je vous la rappelle : si $\sqrt{2}$ était rationnel, on pourrait l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$; $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ entraîne $p^2 = 2q^2$, donc p pair, $p = 2p'$, d'où $4p'^2 = 2q^2$, $2p'^2 = q^2$, donc q pair, contrairement à l'hypothèse que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. C'est le prototype de ce que l'on appelle raisonnement par l'absurde.

La permanence se manifeste de bien d'autres façons. Pour les mathématiciens, les grandes œuvres du passé sont toujours actuelles, parce que l'on peut y puiser sans cesse des idées nouvelles. Il y a des articles de mathématiques dont les seules références sont Platon, ou Riemann, ou Poincaré. C'est là l'une des analogies entre les mathématiques et les arts. Il y a des chefs d'œuvre, et les chefs d'œuvre ne meurent jamais.

Mais le regard change, et les objets eux-mêmes se modifient. Reprenons mes exemples de permanence : les nombres premiers, les cercles ou les triangles.

Les nombres premiers sont comme des briques : c'est de leur agencement que dépend la structure multiplicative des entiers. Dans l'histoire des mathématiques, au 19$^{\text{ième}}$ siècle, sont apparues d'autres structures multiplicatives, et d'autres briques, que l'on a appelées des idéaux. Ainsi les nombres premiers ont des cousins dans des structures parentes de celles des entiers. Comme on peut construire les entiers à partir des nombres premiers, on peut construire des entiers généralisés. Ainsi le champ s'étend sans fin, donnant du grain à moudre aux algébristes et aux analystes. Mais les objets les plus fascinants restent les nombres premiers ordinaires, ceux d'Euclide. Il reste à leur propos des problèmes très faciles à énoncer, comme la fameuse conjecture de Goldbach : tout nombre pair est la somme deux nombres premiers. Et aussi des problèmes très profonds et d'énoncés divers, comme l'hypothèse de Riemann qui peut s'exprimer comme une certaine propriété de régularité dans la distribution des nombres premiers, et aussi bien comme une propriété d'alignement des zéros d'une certaine fonction analytique. Tout récemment, des très grands prix, d'un million de dollars chacun, ont été offerts pour la solution de ces deux conjectures. Mais ce n'est pas là que réside l'actualité la plus frappante des nombres premiers. Les très grands nombres premiers jouent maintenant un rôle clé en cryptographie. Pour coder ou décoder un message, on utilise deux nombres premiers. Il s'agit d'abord de disposer de très grands nombres premiers et, pour cela, de décider si un très grand nombre est premier ou non ; c'est l'objet des "tests de primalité", dont l'origine remonte à Fermat, mais qui utilisent aujourd'hui tout un arsenal d'algèbre, et des outils probabilistes. On considère aujourd'hui que ce problème est essentiellement résolu, et il existe en effet de bons programmes pour certifier qu'un très grand nombre (plusieurs dizaines de décimales) est premier.

Cependant la sécurité du cryptage repose sur l'utilisation de deux nombres premiers, et le fait que ces deux nombres sont parfaitement déterminés si l'on donne leur produit, sans que l'on dispose de méthode pour retrouver ces nombres premiers à partir de leur produit. Actuellement, on considère comme impossible la décomposition de très grands nombres en facteurs premiers. On soupçonne que ce problème est du type NP, c'est-à-dire que le nombre d'opérations requis pour sa solution croît de façon très rapide ("non polynomiale") avec la longueur des données, alors que le problème de la primalité est du type P ("polynomial"). La distinction entre P et NP et les problèmes qui y sont liés forment maintenant un sujet d'étude commun à la logique et à l'informatique théorique. Sur ce sujet également, un très grand prix a été proposé.

Ainsi la cryptologie repose, depuis une vingtaine d'années, sur les nombres premiers, sur la théorie des nombres, et sur les méthodes mathématiques qui y sont liées. Comme la cryptologie est d'intérêt stratégique, le National Security Agency (NSA) des Etats-Unis avait voulu contrôler avant publication tous les articles touchant à ces domaines, et demandé pour cela le concours de l'American Mathematical Society (AMS). Les Notices de l'AMS des années 1981 – 84 reflètent les discussions à ce sujet, et la prise de position de l'AMS refusant son concours à la NSA sur la base non seulement des libertés académiques, mais de l'intérêt bien compris des Etats-Unis. Ainsi les nombres premiers ont été l'occasion d'un des débats les plus éclatants menés dans la communauté mathématique sur les rapports entre science et politique.

J'ai dit que non seulement le regard change, mais que les objets eux-mêmes se modifient. Je voudrais d'abord l'expliquer dans le cas du cercle.

Le cercle est défini par Euclide à partir du centre et du rayon. Mais le cercle est riche de propriétés caractéristiques, qui pourraient également servir de définition. Par exemple, c'est l'ensemble des points d'où l'on voit un segment sous un angle droit. C'est aussi une courbe fermée de courbure constante. C'est encore une courbe fermée qui, pour une longueur donnée, embrasse la plus grande surface. Euclide connaissait la propriété angulaire. Mais, pour la courbure, il a fallu attendre le 17ième siècle, et pour la propriété isopérimétrique, le 19e. L'expérience commune, celle de l'aveugle qui reconnaît une forme circulaire en passant son doigt sur le bord d'une assiette, ou celle des enfants formant une ronde, sont loin de la définition d'Euclide, et il faut combiner la géométrie et l'analyse pour la rejoindre.

Encore s'agit-il toujours du cercle euclidien. Mais les objets mathématiques, comme les êtres vivants, évoluent par perte de structure. Au départ, le cercle est un objet de la géométrie euclidienne, la géométrie dont les invariants sont les distances et les angles. Si l'on perd comme invariants les distances et les angles mais que l'on conserve les rapports de distances entre points alignés, on obtient la géométrie affine, et le cercle est le paradigme de l'ellipse. En ne gardant que des rapports de rapports, on obtient la géométrie projective, et le cercle est l'archétype de la conique. Si l'on ne garde que la structure topologique du plan, le cercle est le modèle de la courbe fermée plane sans point double la plus générale, la courbe de Jordan. On peut enfin oublier que le cercle est une figure plane, et le considérer comme un objet topologique sur lequel opèrent les rotations. Dans la littérature contemporaine, lorsqu'il est question de cercle, c'est généralement de cet objet topologique qu'il est question. L'étude des systèmes dynamiques, où les Français se sont particulièrement distingués, de Poincaré à Jean-Christophe Yoccoz, débute par la considération des transformations du cercle en lui-même que l'on itère, et de l'allure des images successives d'un point au cours des transformations itérées, qui constituent l'orbite de ce point. Tous les phénomèmes périodiques peuvent se représenter sur le cercle, et les séries de Fourier peuvent être considérées comme une étude approfondie du cercle en tant que groupe topologique. Quand il y a plusieurs périodes, le cercle doit être remplacé par un tore, de sorte que, bizarrement, en analyse de Fourier, le cercle apparaît comme un tore à une dimension, et on ne la désigne pas par **C** qui est la lettre réservée au corps des complexes, mais par **T**. Personnellement, j'ai passé ma vie à regarder ce qui se passe sur le cercle **T**.

On peut multiplier les exemples de métamorphoses de cette nature. Je m'arrêterai au triangle. Le triangle est la figure de base de la géométrie euclidienne. Une propriété importante est que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits ; c'est la proposition 31 du livre I d'Euclide, et sa démonstration utilise le postulat d'Euclide. Mais, dès que l'on se trouve sur une surface courbe, il n'est plus vrai que la somme des angles d'un triangle vaille deux droits. Elle est supérieure dans le cas de la sphère, et inférieure dans le cas d'une selle de cheval. On a une bonne image d'un triangle sur une surface en tendant des élastiques entre les sommets ; les côtés s'appellent des arcs de géodésiques. Dans le cas de la sphère, ce sont des arcs de grands cercles, et l'on connaît depuis le 17$^{\text{ième}}$ siècle, par la formule d'Albert Girard, la relation entre les angles d'un triangle sphérique, son aire, et la courbure de la sphère. La formule est

$$m(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$

où α, β, γ sont les mesures en radians des angles du triangle T, $m(T)$ son aire, et R le rayon de la sphère (donc R^{-1} la courbure). Cette formule est très intéressante. Si l'on a un triangle tracé sur la sphère, et si l'on mesure son aire et ses angles, on en tire la courbure de la sphère. Si l'on se place sur une autre surface courbe, un petit triangle géodésique tracé sur la surface permet d'évaluer localement la courbure, à partir de l'aire et des angles. Cette courbure peut être tantôt positive et tantôt négative, la courbure nulle étant l'exception. Ainsi la proposition 32 du livre I d'Euclide concerne le cas exceptionnel. En général, la géométrie d'une surface est non-euclidienne. La formule de Girard, traduite pour une surface générale, signifie qu'une fourmi arpenteuse, astreinte à rester sur la surface, a un moyen de mesurer localement la courbure sans supposer la surface plongée dans notre espace ordinaire. De même nous avons le moyen, si nous admettons avec Einstein que notre univers est courbe, de calculer sa courbure à partir des mesures locales. La notion de courbure est une notion intrinsèque.

La courbure intrinsèque et les géométries non-euclidiennes sont apparues au 19$^{\text{ième}}$ siècle, mais c'est au 20$^{\text{ième}}$ siècle que l'on en a apprécié toute la portée. La géométrie des surfaces à courbure négative, c'est-à-dire des surfaces où la somme des angles d'un trièdre est inférieure à deux droits, est un chapitre majeur des mathématiques contemporaines. La contemplation des triangles a changé d'objet depuis Euclide mais elle est encore plus passionnante que par le passé.

Ainsi change notre regard, et, sous notre regard, les objets eux-mêmes se métamorphosent. J'ai voulu partir d'objets familiers et classiques, pour faire apprécier le changement au sein des mathématiques de toujours. Mais les mathématiques évoluent dans leur ensemble en créant des champs entièrement nouveaux, et pas seulement en labourant de façon neuve les champs du passé. Ainsi, à la suite de Newton et Leibnitz, le calcul différentiel et intégral. Ainsi, à la suite de Cauchy et de Riemann, la théorie des fonctions analytiques. Quid du $20^{\text{ième}}$ siècle, et quid de notre époque ?

Il y a eu et il y a toujours explosion des connaissances, et j'y reviendrai. Mais je voudrai d'abord, sur deux exemples, montrer comment sont nés et se sont développés au $20^{\text{ième}}$ siècle des sujets d'études entièrement nouveaux. Je parlerai du mouvement brownien et de la théorie des graphes.

Au départ du mouvement brownien, il y a un botaniste, Richard Brown, et la description qu'il fait, en 1828, du mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide. Il s'agissait d'abord de particules du pollen, mais Brown lui-même montre qu'il ne s'agit pas d'un phénomène biologique, mais physique. Au cours du $19^{\text{ième}}$ siècle, quelques physiciens s'en occupent, et émettent l'hypothèse que le mouvement des particules est dû à l'agitation moléculaire. En 1905, indépendamment, Einstein et Smoluchowski mettent cette idée en forme, et élaborent la théorie physique du mouvement brownien. La théorie aboutit à une formule surprenante : dans le mouvement des particules, ce ne sont pas les déplacements, mais les carrés des déplacements qui sont proportionnels au temps. De plus, le facteur de proportionalité contient le nombre d'Avogradro, donc des mesures faites sur le mouvement des particules doivent permettre de calculer le nombre d'Avogradro. Indépendamment, le français Jean Perrin et le suédois Theodor Svedberg réalisent ce programme, et cela devait leur valoir le Prix Nobel. Jusqu'en 1920, la théorie du mouvement brownien est la théorie physique d'un phénomène naturel. Alors apparaît Norbert Wiener, qui cherche et trouve un modèle mathématique pour l'équation d'Einstein, sous la forme d'une fonction aléatoire qu'il appelle the fundamental random function. D'un côté, cela force à préciser les fondements mathématiques des probabilités. De l'autre, cela livre aux mathématiciens un objet fascinant à contempler : les trajectoires de ce mouvement brownien idéalisé. Les fondements des probabilités allaient être éclaircis par Kolmogorov en 1933, et l'étude fine des trajectoires allait occuper Paul Lévy toute sa vie. Depuis Paul Lévy, on ne parle plus de "fundamental random function" mais seulement de "mouvement brownien". Aujourd'hui, pour les mathématiciens et aussi pour les physiciens, le "mouvement brownien" n'est plus le phénomène observé par Brown, ni la théorie physique de ce phénomène, mais un objet mathématique parfaitement défini et dont l'étude se poursuit vigoureusement. Comme l'avait prévu Wiener, il joue un rôle fondamental, et cela non seulement en probabilités, mais dans de nombreux domaines de l'analyse et de la géométrie. C'est l'idéalisation la plus parfaite de la promenade au hasard, et il a à la fois un caractère très intuitif et très mystérieux. C'est un outil merveilleux, aussi bien pour l'exploration des surfaces que pour la solution d'équations compliquées, et c'est un objet d'étude très actuel, avec des résultats spectaculaires sur le mouvement brownien plan au cours des toutes dernières années. Il y a trente ans, la plupart des mathématiciens ignoraient tout du mouvement brownien, et ç'avait été une provocation de ma part, lors d'un colloque de mathématiciens consacré à l'histoire des mathématiques contemporaines, d'en parler comme d'un objet central en mathématiques. Aujourd'hui aucun mathématicien n'ignore le mouvement brownien, et il est banal de lui attribuer un rôle central. Par ailleurs, le mouvement brownien et les intégrales qui y sont liées jouent un rôle clé dans les mathématiques financières, et l'on reconnaît aujourd'hui le rôle de pionnier qu'a joué en 1900 Louis Bachelier dans sa théorie de la spéculation financière. A propos des fluctuations de la Bourse, il avait fait une première théorie mathématique du mouvement brownien. L'œuvre, et le nom même de Bachelier sont restés longtemps inconnus. Mais, depuis dix ans, on voit fleurir des séminaires Bachelier, des sociétés Bachelier, des congrès Bachelier. Le mouvement brownien déborde largement des mathématiques, et il manifeste l'emprise de la pensée probabiliste sur toutes les activités humaines.

La théorie des graphes est aussi une création du 20$^{\text{ième}}$ siècle. On en voit des germes dès le 18$^{\text{ième}}$ siècle, mais le statut des problèmes combinatoires à cette époque, et encore au 19$^{\text{ième}}$ siècle, était celui d'amusements. Aujourd'hui la théorie des graphes joue un rôle clé dans la gestion des réseaux informatiques et dans bien d'autres applications, et c'est un champ d'étude en pleine vigueur. Pour en donner une idée, je me bornerai à un aspect : la théorie de Ramsey. Frank Ramsey est un jeune logicien et philosophe, qui est connu pour un article publié juste avant sa mort, en 1930, quand il avait 27 ans. Mais la théorie de Ramsey est surtout l'œuvre du mathématicien hongrois Paul Erdös, et elle est aujourd'hui remarquable par la simplicité des résultats acquis et la difficulté des problèmes qui demeurent. Comme il s'agit de questions simples, je vais tenter d'en donner une idée. Un graphe est constitué d'un nombre fini de points, que l'on appelle les sommets, et de liens joignant deux points, que l'on appelle les arêtes. Le graphe est complet si deux sommets quelconques sont joints par une arête. On peut colorier un graphe, en attribuant des couleurs aux arêtes. Le théorème de Ramsey dit que, quel que soit k, il existe N tel que tout graphe bicolore complet de N sommets contienne un graphe complet monocolore de k sommets. Le calcul de la plus petite valeur possible de N, qu'on désigne par $R(k)$, n'est connu que pour $k = 2, 3, 4$. Il existe un procédé très rapide et ingénieux pour montrer que $R(k) < 2^{2k}$. En sens opposé, on a $R(k) > 2^{k/2}$, ce qui signifie que si $\ldots N \leq 2^{k/2}$ on peut construire un graphe complet bicolore de N sommets dont aucun sous graphe complet n'ait toutes ses arêtes de la même couleur. La construction d'un tel graphe est a priori une gageure. Erdös a découvert le bon procédé, qui est de colorier au hasard les arêtes du graphe complet, et de montrer que la propriété voulue a lieu avec une probabilité positive. À la suite d'Erdös et de l'école hongroise, les graphes aléatoires (random graphs) sont devenus un sujet d'études pour eux-mêmes, et avec une grande variété d'applications. Reste un mystère autour des nombres de Ramsey $R(k)$. Selon Erdös, on arrivera peut-être un jour à calculer $R(5)$, mais $R(6)$ est à tout jamais inaccessible. Selon le combinatoriste W. Gowers, qui a reçu la médaille Fields en 1998, une amélioration des inégalités $2^{k/2} < R(k) < 2^{2k}$ serait de grande importance, non pas tant pour ses conséquences directes que parce que de nouvelles méthodes devraient être dégagées et mises en œuvre. C'est l'un des problèmes proposés pour le siècle à venir dans l'ouvrage collectif réalisé par l'American Mathematical Society sous les auspices de l'Union Mathématique Internationale et qui vient de sortir sous le titre : "Mathematics, frontiers and perspectives".

Les nombres de Ramsey ne sont qu'un chapitre de la théorie des graphes et la théorie des graphes qu'une partie de la combinatoire. Le mouvement brownien, malgré son importance, n'est qu'un chapitre des probabilités. Combinatoire et probabilités interagissent, comme je l'ai indiqué à propos des graphes aléatoires. La combinatoire interagit avec l'analyse harmonique, et c'est l'objet du chapitre écrit par Jean Bourgain, autre médaille Fields, dans l'ouvrage de l'AMS. Tout cela est nouveau et en plein essor. Pour tenter d'avoir une vue d'ensemble de sujets actuels et d'avenir, il faut se plonger dans l'un des ouvrages d'exposition et de synthèse qui ont vu le jour récemment : "Mathematics, frontiers and perspectives", et l'ouvrage collectif qui a été dirigé par Jean-Paul Pier "Development of Mathematics 1950 – 2000".

L'introduction de ce dernier ouvrage donne un tableau d'ensemble de l'évolution des mathématiques au cours de ce demi-siècle, et je vais m'en inspirer dans la dernière partie de cet exposé.

Jusqu'à présent, je nous ai promenés en quelques endroits, que j'ai jugés relativement accessibles et attrayants. Dans la forêt mathématique, il y a quelques dizaines d'endroits de cette nature, et des centaines d'autres où une longue marche d'approche serait nécessaire. Il est temps de prendre de la hauteur et de tenter d'avoir une vue d'ensemble.

J'ai parlé de développement explosif au cours du 20ième siècle. Il peut s'apprécier quantitativement : le nombre d'articles mathématiques, et aussi le nombre de mathématiciens actifs, double à peu près tous les dix ans. Mais il doit aussi s'apprécier qualitativement : le paysage mathématique a été bouleversé. Tour à tour sont apparues l'analyse fonctionnelle, la topologie, les probabilités, tandis que la géométrie se mariait à l'analyse pour constituer la géométrie différentielle, et à l'algèbre pour constituer la géométrie algébrique. L'analyse fonctionnelle et les moyens de calcul ont donné naissance à l'analyse numérique. Sous l'influence de l'informatique, la logique, l'algèbre et l'arithmétique se rejoignent dans la galaxie qu'on appelle mathématiques discrètes. Les formes étranges apparues tour à tour en analyse harmonique, en probabilités et dans les systèmes dynamiques sont maintenant systématisées sous le nom de fractales. Des problèmes historiques ont été résolus (le coloriage des cartes au moyen de 4 couleurs, la démonstration du théorème de Fermat) et d'autres sont apparus, dont j'ai déjà donné des exemples.

Pour donner une idée des changements d'optique on peut se référer à la terminologie en cours chez les mathématiciens au cours du 20$^{\text{ième}}$ siècle. Au tout début, et dans le prolongement du 19$^{\text{ième}}$ siècle, c'est une floraison de mots d'origine grecque, vraiment incompréhensibles en dehors de leur définition mathématique : holomorphie, homographie, homologie, homomorphisme, homéomorphisme, homotopie, monodromie, etc... Au tournant du siècle apparaissent des idées révolutionnaires dans la théorie des fonctions et dans la mesure des grandeurs, et la terminologie les traduit, de façon paradoxale, en les rattachant autant que possible aux notions classiques ; c'est le règne des quasi et des presque : la quasi-analyticité d'Hadamard et de Borel, la presque périodicité de Harald Bohr, et surtout le presque partout de Lebesgue, qui prélude au presque sûr des probabilistes. Le milieu du siècle crée beaucoup de termes nouveaux, avec le souci de ne pas s'écarter de la langue commune ; cette tendance avait commencé avec les algébristes, elle s'est accentuée avec la Théorie des Opérations Linéaires de Banach, et surtout avec Bourbaki : "injectif", "surjectif", "bijectif" sont des adjectifs parlants, et qui sont devenus vite classiques, et il en est de même de dizaines de mots forgés par Bourbaki. Et, par rapport à cet épisode de classicisme, l'époque actuelle est plutôt baroque. L'analyse **non** linéaire, la géométrie **non** commutative, le **non**-différentiable, l'analyse **non** standard n'ont qu'un trait commun, mais il est significatif : c'est le **non**. Il traduit bien la volonté d'un changement de point de vue radical, ce qui exprime aussi des termes à forte valeur affective : la théorie des **catastrophes**, les groupes **sporadiques**, les sphères **exotiques**, les attracteurs **étranges**, la géométrie **fractale**, le **chaos** déterministe, la **complexité**, etc... La résonance de ces termes va bien au-delà du monde mathématique, et cela ne va pas sans méprise. Mais dans la mathématique elle-même, ils définissent des objets nouveaux et intéressants. On peut y ajouter des termes anciens, tels que **programmes** et **algorithmes**, auxquels l'informatique a conduit à donner un sens précis.

Les modifications dans la création des termes accompagne des évolutions de grande ampleur, à l'intérieur des mathématiques comme alentour. Il y a plusieurs grilles de lecture de ces évolutions ; par exemple, le rôle et les transformations de la théorie des ensembles, le va-et-vient entre le continu et le discontinu, le va-et-vient entre l'ordre et le désordre, le lien à la physique, le lien à l'informatique, la dynamique interne et la pression des besoins sociaux, les inégalités de développement dans le monde, le mode de travail des mathématiciens etc... Cependant, comme fil directeur, je m'en tiendrai à la discussion que j'ai annoncée en introduction : comment se sont succédées depuis cinquante ans les conceptions dominantes que traduisent les termes de mathématique (au singulier), de mathématiques pures et appliquées et de sciences mathématiques, et quelles évolutions on peut attendre dans l'avenir.

Dans les pays de langue française, **la** mathématique est le terme en faveur dans les années 1960. Il signifie l'unité retrouvée à travers des domaines dispersés. L'effort de réaménagement et de mise en forme nouvelle date du 19$^{\text{ième}}$ siècle, mais c'est avec Bourbaki qu'il atteint son point culminant, qui est aussi un point d'orgue. Le traité de Bourbaki s'appelle "Eléments de mathématique". Eléments comme Euclide, et mathématique sans s. Le projet est d'exposer l'essentiel des mathématiques, en prenant les mathématiques à leur début, et en donnant des démonstrations complètes. La première partie du traité s'appelle "les structures fondamentales de l'analyse". Bourbaki part de la théorie des ensembles, puis dégage les principales structures de l'algèbre, de la topologie et des fonctions d'une variable réelle – c'est tout cet immense domaine qu'il appelle l'analyse. En raffinant et en croisant ces structures, il est capable d'exposer une bonne partie des mathématiques de son temps.

Bourbaki est un chef d'œuvre, dans sa conception et dans son écriture. Cependant il a eu des effets pervers, de par sa qualité même. Dans la jungle des mathématiques, il a dessiné un beau parc à la française, en ancrant deux idées fausses : d'abord, que les grandes avenues constituaient l'ossature de la mathématique, et ensuite, plus gravement, qu'il n'y avait pas de mathématique hors du champ couvert par Bourbaki. On sait les conséquences que ces idées fausses ont eues dans l'enseignement. On sait moins à quel point elles entraient en résonance avec l'idéologie de l'époque, à savoir les sciences à l'honneur comme élément clé de la compétition internationale, la physique et les mathématiques au pinacle dans la conquête de l'espace, l'ambition dans toutes les sciences de découvrir les structures fondamentales : structures de la matière, structure des langues, structures de la pensée, structures des sociétés.

La mathématique, science des structures mathématiques, faisait figure de clé universelle. La mathématique de Bourbaki est loin de couvrir le champ des mathématiques pures, et a fortiori elle est loin des mathématiques appliquées. Or les mathématiques appliquées, probabilités et analyse numérique en tête, prennent leur revanche à partir des années 1970. Les mathématiques appliquées ne revendiquent pas l'exclusivité des applications ; par exemple le CNRS, en France, lance au cours des années 1980 des programmes intitulés "applications des mathématiques pures". L'unité des mathématiques n'apparaît plus fondée sur le socle de la théorie des ensembles, mais au contraire comme l'expression d'interactions entre ses branches. Dans les années 1980, la préoccupation des structures est bien moins présente dans les sciences que vingt ans auparavant, et les mots clés deviennent interactions et modèles. La modélisation mathématique, qui permet la simulation par ordinateur, intervient dans toutes les disciplines et dans beaucoup de pratiques sociales. La mathématique, science des structures, se transforme en les mathématiques, science des modèles. Le rapport de conjoncture du CNRS de 1989 et celui de 1991 sont rédigés sur une base interdisciplinaire, regroupant des disciplines en interaction. Une seule science y apparaît dans un chapitre propre, et il s'agit des mathématiques, sous le titre "Interactions des mathématiques". Les mathématiques, science des modèles, interagissent en effet avec toutes les autres sciences.

Ce qui apparaît avec évidence aujourd'hui, c'est que cette interaction n'est pas à sens unique. Les mathématiques se nourrissent de concepts, de méthodes, de problèmes qui viennent des autres sciences, en même temps qu'elles les alimentent aussi de concepts, de méthodes et de problèmes mathématiquement élaborés. C'est ce va-et-vient que traduit le terme de "sciences mathématiques". Les sciences mathématiques regroupent tous les aspects mathématiques de l'informatique, de la mécanique, de la physique, de la chimie, de la biologie, de l'économie, etc..., et aussi de l'art de l'ingénieur, de l'enseignant ou du médecin, en même temps que les créations et transformations opérées par les mathématiciens à partir des matériaux fournis par le passé de leur science et par ses interactions présentes avec toutes les disciplines scientifiques et beaucoup d'activités humaines. Si l'on veut, une image possible des sciences mathématiques est un immense système de pompage et d'irrigation, où l'eau vient de partout et va partout, avec des dispositifs complexes à l'arrivée et au départ, et au centre une sorte d'usine à distiller les idées, les malaxer et les combiner de façon à assurer qu'elles soient non seulement potables, mais agréables, puissantes, et utilisables dans des circonstances variées.

On peut illustrer le rôle des interactions par des exemples. En fait, j'en ai déjà donné quelques uns avec la cryptologie, qui utilise de l'algèbre et des probabilités, et qui pose de très intéressantes questions de logique ; avec la géométrie, dont le lien à la physique est constant ; avec le mouvement brownien des mathématiciens, qui est né à la fois de la physique et de la finance, et qui y revient ; avec la théorie des graphes, qui a reçu une impulsion de la chimie au début du siècle, et qui est essentielle maintenant dans la gestion des réseaux de communication. On peut multiplier les exemples. Les interactions sont particulièrement fortes avec l'informatique et avec la physique, mais elles se manifestent aussi, de façon nouvelle et impétueuse, en chimie et en biologie.

Pour en avoir une idée plus claire, je vais de nouveau restreindre le champ et me limiter à un domaine des mathématiques, l'analyse de Fourier. Les travaux de Fourier qui ont donné naissance à ce que l'on appelle aujourd'hui séries de Fourier et intégrales de Fourier datent de deux siècles, et ils avaient pour objet la propagation de la chaleur. La propagation de la chaleur n'a rien à voir, comme phénomène physique, avec la production du son par des cordes vibrantes, mais Fourier avait reconnu une similitude dans les équations qui régissent les deux phénomènes. L'équation de la chaleur, l'équation de Fourier, se retrouve plus tard chez Bachelier et chez Einstein, comme gouvernant la diffusion par le mouvement brownien. Quant aux séries de Fourier, elles alimentent par leurs mystères toute une partie de l'analyse du $19^{\text{ième}}$ et du $20^{\text{ième}}$ siècles ; c'est devenu un sujet de mathématiques pures. En même temps, elles se retrouvent en physique et elles sont familières aux ingénieurs électriciens en ce qu'elles représentent tous les phénomènes périodiques.

Leur usage s'accélère brusquement à la fin des années 60, lorsqu'apparaît la transformée de Fourier rapide. La FFT, Fast Fourier Transform, conquiert la théorie du signal, qui est relative à des fonctions du temps, et aussi l'astrophysique et la cristallographie, qui font intervenir des fonctions de variables spatiales. À son tour la cristallographie, avec l'analyse des diagrammes de rayons X, devient le moyen le plus important pour déterminer la structure de grosses molécules organiques, de protéines et de virus. Le prix Nobel de chimie en 1985 est attribué à Hauptman et Karle pour la mise au point de méthodes mathématiques pour le calcul des structures à partir de ces diagrammes qui est une sorte d'inversion de la transformation de Fourier en l'absence d'une donnée ; en effet les diagrammes ne donnent que le module de la transformée de Fourier, et on a besoin aussi de la phase. Il y a deux ans, le prix de la Société américaine de cristallographie est allé à un Français, Gérard Bricogne, pour ses travaux mathématiques associant analyse de Fourier, statistique et algèbre. Il y a deux mois, la découverte de la structure du ribosome a mobilisé non seulement beaucoup de biologie et de chimie, et du rayonnement synchrotron, mais des méthodes mathématiques sophistiquées où l'analyse de Fourier et la transformation de Fourier rapide jouent un rôle essentiel.

Un autre avatar spectaculaire des séries de Fourier est la théorie des ondelettes. Les ondelettes sont des sortes de sinusoïdes amorties qui s'imposent dans la théorie du signal, et ont été introduites par des physiciens et des ingénieurs. Leur théorie mathématique date de 1985 et des travaux d'Yves Meyer et de ses collaborateurs. Les séries d'ondelettes ressemblent aux séries de Fourier, mais elles permettent l'étude des phénomènes localisés beaucoup mieux que les séries de Fourier. Dès 1985 elles ont eu des applications remarquables en mathématiques pures. Depuis lors, elles se sont imposées, par leur simplicité et leur puissance, comme un outil commun à la théorie du signal, à la statistique, et actuellement et surtout, à l'analyse et à la compactification des images. Les ondelettes se trouvent maintenant, bien cachées, dans les caméras numériques, et dans la transmission des images télévisées. Il y a floraison de travaux et d'ouvrages sur les ondelettes. Le plus important est que la théorie mathématique des ondelettes est devenue le bien commun de ses initiateurs et de ses utilisateurs, et qu'elle a ainsi rapproché mathématiciens, physiciens et ingénieurs.

Heureusement, les progrès en mathématiques ne se font pas seulement pas accumulation, mais aussi par refonte et simplification. C'est pourquoi l'efflorescence des sciences mathématiques ne me paraît pas une menace pour l'unité des mathématiques, au contraire. Les mathématiciens ont un rôle toujours plus important en brassant tout ce qui leur vient d'ailleurs, et en malaxant sans cesse la pâte mathématique pour en extraire l'essentiel.

D'ailleurs une tendance récente chez les mathématiciens est de valoriser la réflexion sur la signification des mathématiques, sur la philosophie des mathématiques contemporaines et en particulier de la modélisation, et sur les liens entre mathématiques et société. L'Union Mathématique Européenne et l'Union Internationale des Mathématiciens, qui tiennent en alternance des congrès quadriannuels, ont fortement accentué cette tendance depuis 1992.

C'est aussi le sens de l'année 2000 comme année mondiale des mathématiques. L'idée de l'année mondiale revient à l'Union Mathématique Internationale, mais son audience internationale tient à la décision de l'UNESCO de valider cette proposition, et il faut souligner que cette décision de l'UNESCO a été proposée, d'abord, par la commission nationale luxembourgeoise.

L'année mathématique mondiale 2000 a été marquée par une foule d'initiatives et de manifestations, dans tous les pays du monde, de la séance spéciale que les Cortes en Espagne ont consacrée, en janvier, aux mathématiques, au récent congrès de Duisburg, en Allemagne, sur les enjeux actuels de l'enseignement des mathématiques et des activités périscolaires dans le domaine. D'excellents livres ont été publiés. La perspective des sciences mathématiques est largement ouverte : de plus en plus de problèmes, de plus en plus de méthodes, de plus en plus d'applications.

Cependant des inquiétudes se manifestent. La science en général, et les mathématiques en particulier, n'ont pas actuellement la faveur publique (j'entends celle de la presse et des médias) ni celle des pouvoirs publics dans les pays développés. L'attention et les moyens vont à ce qui rapporte le plus rapidement, alors que le rendement des mathématiques est à long terme. Les jeunes se détournent des études scientifiques, et particulièrement des mathématiques, dans les pays riches. Seul le braindrain permet aux Etats-Unis de maintenir leur position dominante, et aux pays Européens où les mathématiques ont fleuri depuis le $16^{\text{ième}}$ siècle de garder une certaine place. On sent le danger que les mathématiques disparaissent parce qu'il n'y aurait pas assez de jeunes mathématiciens.

Comment faire se rejoindre les perspectives scientifiques, largement ouvertes, et les perspectives pour les jeunes et pour les sociétés ? Le problème est général et concerne toutes les sciences. Il me semble, en mathématiques, à la fois particulièrement aigu et particulièrement facile à aborder.

D'abord, il y a des aptitudes mathématiques chez les jeunes qui paraissent également répartis dans le monde. Aux Olympiades mathématiques internationales, ce ne sont pas les pays riches qui brillent le plus. Dans tous les pays, pauvres ou riches, les mathématiques permettent aux enfants et adolescents de ressentir ce qui constitue pour une part le propre de la recherche : le désir de surmonter une difficulté intellectuelle, le travail et la peine, et la joie de la difficulté élucidée.

Ensuite, il y a ce fait nouveau que les moyens de communication modernes créent la possibilité, en mathématiques, de sortes de laboratoires sans murs où un mathématicien, isolé géographiquement, peut être partie prenante de la recherche internationale menée dans son domaine. En principe, à condition d'avoir des moyens d'existence et de travail décents, les mathématiciens de toutes les parties du monde doivent pouvoir vivre et travailler dans leur pays.

Enfin, nous avons tous, comme citoyens, à penser le mode à venir autrement qu'à l'aune courte des bénéfices à engranger immédiatement de la recherche scientifique. Si l'humanité perdure, ce ne peut être que par les moyens d'adaptation qui lui sont propres : la curiosité, qui permet de balayer intellectuellement tous les champs du possible, et la transmission des connaissances essentielles, qui permet en principe à tous les hommes de mobiliser leurs capacités pour affronter l'inconnu. La seule chose en effet que nous connaissions de l'avenir, c'est que nos petits-enfants y rencontreront l'imprévisible et l'inconnu. Ils auront beaucoup de travail pour y faire face. En faisant des mathématiques et en assurant leur permanence dans la mémoire humaine comme leur progression dans l'exploration des possibles, nous contribuons, pour notre part, au travail de nos petits-enfants.

C'est là une façon optimiste de voir l'articulation des sciences mathématiques et des sociétés humaines, comme je l'avais annoncé. Vous nous avez invité à rêver le 21ième siècle. Prenez ceci comme le rêve d'un mathématicien.

Département de mathématiques
Université Paris-Sud Orsay
Bât. 425
F-91405 Orsay Cedex
France
Jean-Pierre.KAHANE@math.u-psud.fr