Travaux mathématiques
Fascicule XV, 2004
19-43

Contraction de SU(1,1) vers le groupe de Heisenberg

Benjamin Cahen

Résumé

On montre que les représentations de la série discrète de $SU(1,1)$ se contractent au sens de Mickelsson et Niederle [MN] vers les représentations unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg en utilisant le calcul de Berezin sur les orbites coadjointes associées à ces représentations. Une version infinitésimale de ce résultat est obtenu en étudiant le comportement par contraction de fonctions hamiltoniennes sur ces orbites coadjointes.

Abstract

We show that the discrete series representations of $SU(1,1)$ can be contracted in the sense of Mickelsson and Niederle [MN] to the unitary irreducible representations of the Heisenberg group by use of Berezin calculus on the coadjoint orbits associated to these representations. An analogous result at the Lie algebras level is obtained by considering Hamiltonian functions on these coadjoint orbits.

Mots clés : Groupes de Lie, représentations, série discrète, orbites coadjointes, contractions, calcul de Berezin.
Mathematics Subject Classification : 22E46, 53D50, 81S10.

1. Introduction

Les contractions de groupes et d'algèbres de Lie ont été introduites par E. Inonu et E.P. Wigner [IW]. Soient G et H deux groupes de Lie réels connexes de même dimension et d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. Une contraction de $\mathfrak{g}$ vers $\mathfrak{h}$ est une famille $(C_r)_{r\in]0,1[}$ d'isomorphismes de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que

$$\lim_{r\to 0} C_r^{-1}\left[C_r\left(X\right), C_r\left(Y\right)\right]_{\mathfrak{g}} = [X,Y]_{\mathfrak{h}}\,,$$

pour tous X et Y éléments de $\mathfrak{h}$ [D]. Si l'on suppose que $(C_r)_{r\in]0,1[}$ est une famille bornée de l'espace des applications linéaires de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, on peut vérifier qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{h}$ tel que, pour tout $r\in]0,1[$, $c_r = \exp_G \circ C_r \circ \exp_H^{-1}$ définisse un difféomorphisme de U dans $c_r(U)$ et que

$$\lim_{r\to 0} c_r^{-1}\left(c_r(x)\, c_r(y)^{-1}\right) = x\, y^{-1}$$

pour tous x et y assez proches de l'identité de H. La famille $(c_r)_{r\in]0,1[}$ est alors appelée contraction de G vers H [MN], [R].

Les contractions permettent de relier les représentations de deux groupes de Lie. Ainsi, J. Mickelsson et J. Niederle ont montré dans [MN] que les représentations de masse non nulle du groupe de déplacements $\mathbb{R}^{n+1}\times SO(n+1)$ et les représentations de masse carrée positive du groupe de Poincaré généralisé $\mathbb{R}^{n+1}\times SO_0(n,1)$ peuvent être obtenues par contraction (c'est-à-dire comme limites en un sens qui est précisé dans [MN]) de représentations de la série principale de $SO_0(n+1\,,\,1)$. Plus généralement, A.H. Dooley et J.W. Rice ont montré dans [DR2] que les représentations de la série principale d'un groupe de Lie connexe semi-simple non compact se contractent vers les représentations génériques de son groupe de déplacements de Cartan. Dans le même ordre d'idées mais avec un type de contraction différent de ceux des exemples précédents, F. Ricci a étudié une contraction des représentations unitaires irréductibles de $SU(2)$ vers les représentations unitaires irréductibles non dégénérées du groupe de Heisenberg [R].

En dehors de leur intérêt propre, les contractions de représentations ont des applications diverses en analyse harmonique : obtention de formules de type Mehler-Heine pour les fonctions spéciales [DR2], [R], transport de résultats sur les multiplicateurs de Fourier d'un groupe de Lie à un autre [RR].

A.H. Dooley a proposé dans [D] d'étudier les contractions de représentations de groupes de Lie dans le cadre de la méthode des orbites. On peut observer en effet dans divers exemples que, lors de la contraction d'une famille de représentations unitaires irréductibles vers une représentation unitaire irréductible, les orbites coadjointes associées aux représentations de cette famille se déforment vers l'orbite coadjointe associée à la représentation contractée. Une application des idées de [D] à l'étude d'une contraction des représentations de la série discrète de $SU(1,1)$ vers des représentations unitaires irréductibles de $\mathbb{R}^2\times SO_0(1,1)$ a été donnée dans [CiD] et [Re].

Pour relier directement le comportement par contraction des représentations à celui des orbites coadjointes, P. Cotton et A.H. Dooley ont proposé dans [CD] d'utiliser la notion de calcul symbolique adapté [Ca1]. Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et π une représentation unitaire irréductible de G associée par la méthode des orbites à une orbite coadjointe $\mathcal{O}$ de G. Notons, pour X élément de $\mathfrak{g}$, $\widetilde{X}$ la fonction définie sur l'orbite $\mathcal{O}$ par

$$\widetilde{X}(\xi) = <\xi, X> \qquad (\xi\in\mathcal{O}\subset\mathfrak{g}^*)\,.$$

L'orbite $\mathcal{O}$ étant munie de sa 2-forme symplectique de Kirillov, $\widetilde{X}$ est l'hamiltonien du champ de vecteurs invariant sur $\mathcal{O}$ défini par $X \in \mathfrak{g}$. Un calcul symbolique sur $\mathcal{O}$ est une correspondance linéaire bijective $f \to W(f)$ entre une classe de fonctions sur $\mathcal{O}$ (appelées symboles) et une classe d'opérateurs sur l'espace $\mathcal{H}$ de la représentation π. Un calcul symbolique W sur $\mathcal{O}$ est dit adapté lorsque les fonctions $\widetilde{X}\,(X \in \mathfrak{g})$ sont des symboles et qu'il existe un sous-espace dense $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}$ tel que, pour tous X dans $\mathfrak{g}$, φ dans $\mathcal{D}$,

$$W(i\,\widetilde{X})\,\varphi = d\pi\,(X)\,\varphi\,.$$

En pratique, lorsque que l'orbite $\mathcal{O}$ est symplectomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$ muni de sa 2-forme symplectique usuelle ($n = 1/2\dim\mathcal{O}$), la transformation de Weyl [F] donne fréquemment un calcul symbolique adapté sur $\mathcal{O}$ [Ca2], [W]. Lorsque l'orbite $\mathcal{O}$ est une variété kaehlérienne, le calcul de Berezin défini par une méthode d'états cohérents conduit en général également à un calcul symbolique adapté sur $\mathcal{O}$ (voir [Ca1] et ses références).

L'exemple étudié au moyen de calculs symboliques dans [CD] est celui de la contraction des représentations de la série principale de $SL(2,\mathbb{R})$ vers les représentations génériques de $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$. Les orbites coadjointes associées à ces représentations sont des cylindres et les calculs symboliques adaptés considérés sont dérivés de la transformation de Weyl sur $\mathbb{R}^2$. Cotton et Dooley montrent alors que le calcul symbolique introduit sur une orbite coadjointe associée à une représentation générique de $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$ est limite (en un sens précisé dans [CD]) de calculs symboliques sur les orbites coadjointes associées aux représentations de la série principale de $SL(2,\mathbb{R})$ ce qui permet d'obtenir, dans ce cas particulier, une version infinitésimale des résultats de [DR1]. Des résultats analogues ont été obtenus dans [Ca3] où une contraction des représentations de la série principale de $SO_0(n+1,1)$ vers les représentations massives du groupe de Poincaré généralisé $\mathbb{R}^{n+1} \times SO_0(n,1)$ a été étudiée à l'aide de calculs symboliques adaptés construits sur les orbites coadjointes associées en combinant transformation de Weyl et calcul de Berezin.

Dans [Ca4], on a étudié la contraction des représentations unitaires irréductibles de $SU(2)$ vers les représentations unitaires irréductibles non dégénérées du groupe de Heisenberg introduite dans [R] en utilisant le calcul de Berezin sur les orbites coadjointes associées. Dans cet exemple, à la différence des exemples précédents, les opérateurs des représentations considérées sont des opérateurs du calcul symbolique i.e. correspondent dans le calcul de Berezin à des fonctions, appelées star-exponentielles dans [ACG], sur les orbites coadjointes associées à ces représentations. Les résultats relatifs à la contraction des représentations peuvent se lire sur le comportement des star-exponentielles et on a ainsi pu donner en particulier une preuve très simple du principal résultat de [R].

Le but du présent travail est d'introduire et d'étudier de façon analogue une contraction des représentations de la série discrète de $SU(1,1)$ vers les représentations unitaires irréductibles non dégénérées du groupe de Heisenberg. Les représentations de la série discrète de $SU(1,1)$ et les représentations unitaires irréductibles non dégénérées du groupe de Heisenberg peuvent être réalisées comme représentations induites holomorphes, les orbites coadjointes correspondantes admettent des structures kaehlériennes invariantes et on dispose sur ces orbites du calcul de Berezin qui définit un calcul symbolique adapté. Nos principaux résultats (propositions 6.1 et 7.2) permettent de déduire la contraction considérée des représentations de la série discrète de $SU(1,1)$ vers les représentations unitaires irréductibles non dégénérées du groupe de Heisenberg de la convergence des symboles de Berezin des opérateurs de ces représentations. En particulier, on montre que la contraction de représentations étudiée s'effectue au sens de [MN] et que les coefficients des représentations unitaires irréductibles de H sont limites de suites de coefficients de représentations unitaires irréductibles de $SU(1,1)$ ce qui constitue l'analogue du principal résultat de [R]. On étudie également de façon similaire la contraction des différentielles des représentations de la série discrète de $SU(1,1)$ vers les différentielles des représentations unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg à partir du comportement des fonctions hamiltoniennes $\widetilde{X}$ $(X \in \mathfrak{g})$.

Le plan de cet article est le suivant. Dans le paragraphe 2 on décrit rapidement la construction, par quantification géométrique d'orbites coadjointes, de la série discrète de $SU(1,1)$, on introduit le calcul de Berezin sur ces orbites coadjointes et on donne l'expression des star-exponentielles. Dans le paragraphe 3, on procède de même pour les représentations unitaires irréductibles non dégénérées de H. On peut remarquer que les fonctions quantifiables (au sens de la quantification géométrique, voir [Wo]) sont dans les cas considérés ici des symboles du calcul de Berezin et que le calcul symbolique issu de la quantification géométrique coïncide avec celui défini par le calcul de Berezin sur la classe des fonctions quantifiables [CGR1]. Dans le paragraphe 4, on précise la contraction de $SU(1,1)$ vers H utilisée et, dans le paragraphe 5, on traduit en termes de fonctions hamiltoniennes $\widetilde{X}$ $(X \in \mathfrak{g})$, la déformation des orbites coadjointes observée lors de cette contraction. On établit dans le paragraphe 6 un résultat reliant le comportement d'une suite d'opérateurs agissant sur les espaces des représentations de la série discrète à celui de la suite des symboles de Berezin de ces opérateurs. On en déduit dans les paragraphes 7 et 8 les résultats cités précédemment relatifs à la contraction des représentations de la série discrète de $SU(1,1)$ et de leurs différentielles. On termine en étudiant (paragraphe 8) la contraction de suites d'opérateurs dont les symboles de Berezin sont des fonctions quantifiables.

2. La série discrète de SU(1,1)

Dans ce paragraphe, on donne une construction des représentations de la série discrète de $SU(1,1)$ par quantification géométrique de certaines orbites coadjointes de ce groupe suivant la méthode des orbites de Kostant et Kirillov (voir par exemple [K]). La vérification des résultats exposés, aisée, est laissée au lecteur. La plupart de ces résultats peuvent par ailleurs se retrouver dans [ACG] et [CGR2]. Dans le paragraphe 3 suivant, on procédera de même pour les représentations unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg.

2.1. *(Généralités)* Dans toute la suite, G désigne le groupe $SU(1,1)$ des matrices

$$g\,(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$$

où α et β sont des nombres complexes tels que $|\alpha|^2-|\beta|^2=1$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}=su\,(1,1)$ de G admet pour base

$$u_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\quad,\quad u_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad u_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}.$$

Notons (u_1^*,u_2^*,u_3^*) la base de $\mathfrak{g}^*$ duale de la base (u_1,u_2,u_3) et $g\cdot\xi$ l'action coadjointe de $g\in G$ sur $\xi\in\mathfrak{g}^*$.

Soit R un réel non nul. L'orbite de $R\,u_3^*$ sous l'action coadjointe de G est lorsque $R>0$ (respectivement $R<0$) la nappe $(x_3>0)$ (respectivement $(x_3<0)$) de l'hyperboloïde formé des points $\xi=x_1\,u_1^*+x_2\,u_2^*+x_3\,u_3^*$ tels que

$$-x_1^2-x_2^2+x_3^2=R^2.$$

2.2. *(Orbites coadjointes associées à la série discrète)* Si n est un entier positif supérieur ou égal à 2, notons $\mathcal{O}_n$ l'orbite coadjointe de $\xi_n=(n\,/\,2)u_3\in\mathfrak{g}^*$. Le stabilisateur de ξ_n pour l'action coadjointe est le tore $\mathbb{T}$ formé des matrices $g\,(e^{i\theta}\,,\,0)$ $(\theta\in\mathbb{R})$ dont l'algèbre de Lie est $\mathbb{R}\,u_3$.

Le groupe $G=SU(1,1)$ se complexifie en $SL(2,\mathbb{C})$. Notons $\mathcal{P}$ la polarisation complexe positive au point ξ_n engendrée par u_1+iu_2 et u_3. Le sous-groupe connexe P de $SL(2,\mathbb{C})$ dont l'algèbre de Lie est $\mathcal{P}$ est formé des matrices

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ c & 1/a\end{pmatrix}$$

où $a\in\mathbb{C}\setminus(0)$ et $c\in\mathbb{C}$. L'ensemble $G.P$ est alors l'ouvert de $SL(2,\mathbb{C})$ formé des matrices

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

telles que $|b|<|d|$.

On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert du plan complexe. On pose pour $z\in\mathbb{C}$

$$\sigma(z)=\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

et pour $z\in\mathbb{D}$

$$\sigma_0(z)=\frac{1}{\sqrt{1-z\overline{z}}}\begin{pmatrix}1 & z\\ \overline{z} & 1\end{pmatrix}.$$

Les identifications

$$\mathbb{D}\simeq G.P\,/\,P\simeq G\,/\,\mathbb{T}\simeq\mathcal{O}_n$$

données par les applications

$$z \to \sigma(z)P \to \sigma_0(z)\mathbb{T} \to \sigma_0(z)\cdot\xi_n$$

conduisent à la carte $\psi_n : \mathbb{D} \to \mathcal{O}_n$ de l'orbite $\mathcal{O}_n$ donnée par

$$\psi_n(z) = \frac{n}{2}\left(\frac{z+\overline{z}}{1-z\overline{z}}\,u_1^* + \frac{z-\overline{z}}{i(1-z\overline{z})}\,u_2^* + \frac{1+z\overline{z}}{1-z\overline{z}}\,u_3^*\right).$$

Le groupe G agit sur $\mathbb{D}$ par transformations homographiques :

$$g(\alpha,\beta)\cdot z = \frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$$

et cette action correspond dans les identifications précédentes à l'action naturelle de G sur $G.P/P$ et à l'action coadjointe de G sur $\mathcal{O}_n$.

Remarquons que la 2-forme de Kirillov de $\mathcal{O}_n$ définie par

$$\Omega_n(\xi)\,(X(\xi),Y(\xi)) =< \xi\,,[X,Y] >$$

pour X et Y dans $\mathfrak{g}$ et ξ dans $\mathcal{O}_n$, s'écrit dans la carte donnée par ψ_n :

$$\omega_n = \frac{in}{(1-z\overline{z})^2}\,dz\wedge d\overline{z}.$$

2.3. *(Représentations de la série discrète)* On va retrouver ici, par quantification géométrique G-invariante de la variété symplectique $(\mathbb{D},\omega)$, la représentation de la série discrète de G associée à l'orbite $\mathcal{O}_n$. Le caractère χ_n^0 de $\mathbb{T}$ défini par $d\chi_n^0 = i\;\xi_n\mid_{\mathbb{R}\,u_3}$ se prolonge en un caractère χ_n de P défini par

$$\chi_n\begin{pmatrix} a & 0\\ c & 1/a\end{pmatrix} = a^{-n}\,.$$

On considère alors le fibré holomorphe $L_n = G.P\times_{\chi_n}\mathbb{C}\to G.P/P\simeq\mathbb{D}$ que l'on munit de la connexion ∇^n et de la structure hermitienne h_n définies comme suit. Le fibré L_n étant trivialisé au moyen de la section s_0 donnée par

$$s_0(z) = [\sigma(z),1]$$

on pose

$$\nabla^n_X(f.s_0) = (X(f)(z) + \alpha_n(X)(z)f(z))\,s_0(z)$$

pour f fonction et X champ de vecteurs de classe C^∞ sur $\mathbb{D}$, α_n désignant la 1-forme sur $\mathbb{D}$ définie par

$$\alpha_n = -\frac{n\overline{z}}{1-z\overline{z}}dz.$$

On pose également pour $z\in\mathbb{D}$, $u\in\mathbb{C}$ et $v\in\mathbb{C}$:

$$h_n(z)(u\,s_0(z), v\,s_0(z)) = (1-z\overline{z})^n u\overline{v}.$$

La connexion ∇^n admet pour courbure $-i\omega_n$ et laisse invariante la structure hermitienne h_n. Le triplet (L_n, ∇^n, h_n) constitue alors une pré-quantification de $(\mathbb{D}, \omega_n)$. La polarisation $\mathcal{P}$ engendre la polarisation géométrique $\mathcal{F}$ de l'orbite $\mathcal{O}_n$ définie par

$$\mathcal{F}_{g\cdot\xi_n} =< (\mathrm{Ad}g.X)(g\cdot\xi_n), \quad X \in \mathcal{P} >$$

qui correspond dans la carte donnée par ψ_n à la polarisation géométrique de $\mathbb{D}$ engendrée par le champ de vecteurs $(1 - z\overline{z})\partial_{\overline{z}}$. Les sections $\mathcal{F}$-polarisées du fibré L_n sont donc les sections holomorphes de L_n. L'action naturelle de G sur ces sections :

$$(g\cdot s)(z) = g\cdot s(g^{-1}\cdot z)$$

donne une représentation unitaire irréductible de G dans l'espace de Hilbert des sections holomorphes s de L_n telles que

$$\|s\|^2 = \int_{\mathbb{D}} h_n(z)(s(z), s(z))\,\omega_n(z) < +\infty.$$

Les sections holomorphes de L_n s'écrivent $s = f.s_0$ où f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. La représentation précédente de G est alors équivalente à la représentation π_n de G réalisée par

$$(\pi_n\,(g(\alpha,\beta))\,f)(z) = (\alpha - \overline{\beta}\,z)^{-n}\ f(g(\alpha,\beta)^{-1}\cdot z)$$

dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_n$ des fonctions f holomorphes sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\|f\|_n^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\,d\mu_n(z)\ < +\infty$$

où $d\mu_n(z) = \frac{n-1}{\pi}(1 - z\overline{z})^{n-2}\,dx\,dy$, $dx\,dy$ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Une base orthonormée de $\mathcal{H}_n$ est formée par les polynômes $f_p^n\,(z) = \sqrt{C_{n+p-1}^p}\,z^p$ où $p \in \mathbb{N}$ (la notation C_n^p désignant le coefficient binômial $\frac{n!}{p!(n-p)!}$).

2.4. *(Calcul de Berezin [CGR1])* Soit $t \in \mathbb{D}$. Il existe un unique élément e_t^n de $\mathcal{H}_n$, appelé état cohérent, tel que, pour tout f dans $\mathcal{H}_n$,

$$< f\,,\, e_t^n >_n = f\,(t)\,.$$

$<\ \ ,\ \ >_n$ désignant le produit hermitien de $\mathcal{H}_n$. On obtient aisément:

$$e_t^n\,(z) = (1 - \overline{t}\,z)^{-n}\,.$$

Le symbole de Berezin d'un opérateur A de $\mathcal{H}_n$ est la fonction $s_n\,(A)$ définie sur $\mathbb{D}$ par

$$s_n\,(A)(z) = \frac{< A\,e_z^n\,,\, e_z^n >_n}{< e_z^n\,,\, e_z^n >_n}\,.$$

et le symbole double de Berezin d'un opérateur A de $\mathcal{H}_n$ est la fonction :

$$S_n(A)(z,z') = \frac{< A\, e^n_{z'}\,,\, e^n_z >_n}{< e^n_{z'}\,,\, e^n_z >_n}$$

qui est définie sur $\mathbb{D}^2$ puisque $< e^n_{z'}\,,\, e^n_z >_n \neq 0$ pour tous z et z' dans $\mathbb{D}$, holomorphe en la variable z et antiholomorphe en la variable z' et donc déterminée par sa restriction $S_n(A)(z,z) = s_n(A)(z)$ à la diagonale de $\mathbb{D}^2$.

Si A est un opérateur de $\mathcal{H}_n$, $f \in \mathcal{H}_n$ et $z \in \mathbb{D}$, on a la formule suivante qui permet de retrouver l'opérateur A à partir de son symbole double [CGR1] :

$$A\, f\,(z) = \int_{\mathbb{D}} f(z')\, S_n(A)(z,z') < e^n_{z'}\,,\, e^n_z >_n\; d\mu_n\,(z')\,.$$

On en déduit la formule suivante qui sera utilisée plus loin. Pour f, g dans $\mathcal{H}_n$, on a

$$< A\, f, g >_n = \int_{\mathbb{D}^2} f(z')\, \overline{g(z)}\, S_n(A)(z,z') < e^n_{z'}\,,\, e^n_z >_n\; d\mu_n(z)\, d\mu_n(z')\,.$$

2.5. *(Star-exponentielle)* On va donner ici l'expression des symboles de Berezin des opérateurs de la représentation π_n et de sa différentielle $d\pi_n$.

On obtient immédiatement, si $g = g\,(\alpha, \beta) \in G$:

$$S_n(\pi_n(g))(z,z') = (\alpha - \overline{\alpha}\, z\, \overline{z}' - \overline{\beta}\, z + \beta \overline{z}')^{-n}\, (1 - z\overline{z}')^n$$

puis

$$s_m(\pi_m\,(g))(z) = (\alpha - \overline{\alpha}\, z\, \overline{z} - \overline{\beta}\, z + \beta \overline{z})^{-n}\, (1 - z\overline{z})^n.$$

D'autre part, la différentielle de la représentation π_n est donnée par

$$\begin{aligned}
d\pi_n\,(u_1)\; f(z) &= \frac{n}{2}\, i\, z\; f(z) + \frac{1}{2}\, i\, (z^2+1)\, f'(z)\\
d\pi_n\,(u_2)\; f(z) &= \frac{n}{2}\, z\; f(z) + \frac{1}{2}\, (z^2-1)\, f'(z)\\
d\pi_n\,(u_3)\; f(z) &= \frac{n}{2}\, i\; f(z) + i\, z\; f'(z)
\end{aligned}$$

pour $f \in \mathcal{H}_n$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
S_n(d\pi_n\,(u_1))(z,z') &= i\frac{n}{2}\, \frac{z+\overline{z}'}{1-z\overline{z}'}\\
S_n(d\pi_n\,(u_2))(z,z') &= \frac{n}{2}\, \frac{z-\overline{z}'}{1-z\overline{z}'}\\
S_n(d\pi_n\,(u_3))(z,z') &= i\frac{n}{2}\, \frac{1+z\overline{z}'}{1-z\overline{z}'}
\end{aligned}$$

Par suite, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, on a

$$s_n\,(d\pi_n\,(X))(z) = i\; \widetilde{X}\,(\psi_n(z))$$

ce qui exprime que le calcul de Berezin définit un calcul symbolique adapté selon la terminologie de [Ca3].

2.6. *(Fonctions quantifiables)* Les fonctions quantifiables au sens de la quantification géométrique [CGR1], [Wo] sont par définition les fonctions φ de classe C^∞ sur $\mathbb{D}$ dont le champ de vecteurs hamiltonien X_φ est tel que $[X_\varphi, X] \in \mathcal{F}$ pour tout $X \in \mathcal{F}$. Comme la polarisation $\mathcal{F}$ est engendrée par $(1 - z\overline{z})\partial_{\overline{z}}$, les fonctions quantifiables sont ici les fonctions φ sur $\mathbb{D}$ du type

$$\varphi(z) = (1 - z\overline{z})^{-1}(u(z) + v(z)\overline{z})$$

où u et v sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$. La quantification géométrique associe à une telle fonction φ l'opérateur $W^n(\varphi)$ de $\mathcal{H}_n$ défini par

$$W^n(\varphi) = i\nabla^n_{X_\varphi} + \varphi = iX_\varphi + u$$

où X_φ désigne le champ de vecteurs hamiltonien de φ. On vérifie que le symbole de Berezin $s_n(W^n(\varphi))$ de l'opérateur $W^n(\varphi)$ est la fonction φ. Autrement dit, le calcul symbolique issu de la quantification géométrique coïncide avec le calcul de Berezin sur la classe des fonctions quantifiables [CGR1].

2.7. *(Série discrète "antiholomorphe")* Soit n un entier inférieur ou égal à -2. On note comme plus haut $\mathcal{O}_n$ l'orbite sous l'action coadjointe de G de l'élément $\xi_n = (n/2)\, u_3^*$ de $\mathfrak{g}^*$. On considère la polarisation $\mathcal{P}^-$ au point ξ_n engendrée par $u_1 - iu_2$ et u_3, P^- le sous-groupe connexe de $SL(2,\mathbb{C})$ d'algèbre de Lie $\mathcal{P}^-$ et χ_n le caractère de P^- défini par

$$\chi_n \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} = a^{-n}\,.$$

Comme au paragraphe 2.2 les applications

$$z \to \sigma^-(z)P^- \to \sigma_0^-(z)\mathbb{T} \to \sigma_0^-(z)\cdot \xi_n$$

où, pour $z \in \mathbb{D}$, on a posé $\sigma^-(z) = \sigma(z)^{tr}$ et $\sigma_0^-(z) = \sigma_0(z)^{tr}$ (tr désignant la transposition), donnent les identifications

$$\mathbb{D} \simeq G.P^- \,/\, P^- \simeq G \,/\, \mathbb{T} \simeq \mathcal{O}_n$$

ainsi que la carte $\psi_n : \mathbb{D} \to \mathcal{O}_n$ de l'orbite $\mathcal{O}_n$ définie par

$$\psi_n(z) = \frac{n}{2}\left(\frac{z + \overline{z}}{1 - z\overline{z}}\, u_1^* - \frac{z - \overline{z}}{i(1 - z\overline{z})}\, u_2^* + \frac{1 + z\overline{z}}{1 - z\overline{z}}\, u_3^*\right).$$

L'action coadjointe de G sur $\mathcal{O}_n$ correspond dans cette carte à l'action de G sur $\mathbb{D}$ donnée par

$$g(\alpha, \beta)\cdot z = \frac{\overline{\alpha} z + \overline{\beta}}{\beta z + \alpha}$$

et la 2-forme de Kirillov s'écrit

$$\omega_n = \frac{-ni}{(1-z\overline{z})^2}\, dz \wedge d\overline{z}.$$

On forme comme au paragraphe 2.3 le fibré $L_n = G.P^- \times_{\chi_n} \mathbb{C}$ que l'on trivialise au moyen de la section $s_0^- : z \to [\sigma^-(z), 1]$ et que l'on munit de la structure hermitienne h_n et de la connexion ∇^n définies par des formules analogues à celles du paragraphe 2.3 obtenues en y remplaçant n par $-n$ (et s_0 par s_0^-). La polarisation géométrique de $\mathcal{O}_n$ induite par $\mathcal{P}^-$ correspond à la polarisation géométrique de $\mathbb{D}$ engendrée par le champ de vecteurs $(1-z\overline{z})\partial_{\overline{z}}$ et l'action de G sur les sections polarisées du fibré L_n (qui sont les sections holomorphes de L_n) conduit à la représentation π_n de G réalisée dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{-n}$ (que l'on notera $\mathcal{H}_n$) par

$$\pi_n(g(\alpha,\beta)) = \pi_{-n}(g(\overline{\alpha},\overline{\beta})).$$

Les états cohérents définis par

$$e_t^n\,(z) = (1-\overline{t}\,z)^n$$

permettent de définir comme au paragraphe 2.4 le calcul de Berezin qui donne un calcul symbolique adapté. D'autre part, les fonctions quantifiables sont comme au paragraphe 2.6 du type $\varphi(z) = (1-z\overline{z})^{-1}(u(z)+v(z)\overline{z})$ où u et v sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ et la quantification géométrique associe à une telle fonction φ l'opérateur

$$W^n(\varphi) = i\nabla^n_{X_\varphi} + \varphi = iX_\varphi + u.$$

On vérifie que le symbole (simple) de Berezin de l'opérateur $W^n(\varphi)$ est la fonction φ.

3. Les représentations unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg

3.1. Soient H le groupe de Heisenberg de dimension 3, $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H et (v_1, v_2, v_3) une base de $\mathfrak{h}$ dans laquelle les relations de commutation sont

$$[v_1, v_2] = v_3 \quad , \quad [v_1, v_3] = [v_2, v_3] = 0\,.$$

On notera $[a,b,c]$ l'élément $\exp(a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3)$ de H (a,b,c étant 3 réels). La multiplication de H est donnée par

$$[a,b,c]\,.\,[a',b',c'] = [a+a'\,,\,b+b'\,,\,c+c'+\frac{1}{2}\,(ab'-a'b)]\,.$$

Soit (v_1^*, v_2^*, v_3^*) la base de $\mathfrak{h}^*$ duale de (v_1, v_2, v_3). L'action coadjointe de H sur $\mathfrak{h}^*$ est

$$[a,b,c]\cdot(x_1\,v_1^* + x_2\,v_2^* + x_3\,v_3^*) = (x_1 + b\,x_3)\,v_1^* + (x_2 - a\,x_3)\,v_2^* + x_3\,v_3^*$$

et par suite l'orbite coadjointe d'un élément ξ de $\mathfrak{h}^*$ tel que $v_3^*(\xi) = \lambda$ est le plan $(x_3 = \lambda)$ lorsque $\lambda \neq 0$ et est réduite à $\{\xi\}$ lorsque $\lambda = 0$.

On suppose dans toute la suite $\lambda \neq 0$ et on note χ_λ^0 le caractère du centre de H défini par

$$\chi_\lambda^0([0,0,c]) = e^{ic\lambda}\,.$$

D'après le théorème de Stone-von Neumann [F], il existe une représentation unitaire et irréductible de H, unique à équivalence unitaire près, dont la restriction au centre de H est χ_λ^0. On va rappeler ici rapidement comment la méthode des orbites permet de construire cette représentation comme représentation induite holomorphe.

3.2. Soit $\mathcal{O}_\lambda$ l'orbite coadjointe de $\xi_\lambda = \lambda\, v_3^* \in \mathfrak{h}^*$. Notons ε le réel qui vaut 1 si $\lambda > 0$ et -1 si $\lambda < 0$. Soient $\mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ la polarisation complexe positive au point ξ_λ engendrée par $v_1 + i\,\varepsilon\, v_2$ et v_3 et P_ε le sous groupe connexe de $H^{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathcal{P}_\varepsilon$. On remarque que tout élément g de $H^{\mathbb{C}}$ s'écrit de façon unique

$$g = \exp \alpha\,(v_1 - i\,\varepsilon\, v_2) \quad \exp\left(\beta\,(v_1 + i\,\varepsilon\, v_2) + \gamma\, v_3\right)$$

où α, β, γ appartiennent à $\mathbb{C}$.

On en déduit que l'espace homogène $H^{\mathbb{C}}/P_\varepsilon$ s'identifie à $\mathbb{C}$ au moyen de l'application qui à z élément de $\mathbb{C}$ associe la classe de

$$\sigma_\lambda(z) = \exp\left(\frac{z}{2i\lambda}\,(-\varepsilon\, v_1 + i\, v_2)\right)\,.$$

D'autre part, on peut identifier l'orbite $\mathcal{O}_\lambda$ à $\mathbb{C}$ à l'aide de l'application

$$\psi_\lambda \,:\, z \to (Re z)\, v_1^* + \varepsilon\,(Im\, z)\, v_2^* + \lambda\, v_3^*.$$

L'action naturelle de $H^{\mathbb{C}}$ sur $H^{\mathbb{C}}/P_\varepsilon$ induit alors une action holomorphe de $H^{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}$ donnée par

$$\exp\left(a\, v_1 + b\, v_2 + c\, v_3\right) \cdot z = z + (b - \varepsilon\, a\, i)\,\lambda$$

pour $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$, qui prolonge l'action coadjointe de H sur $\mathcal{O}_\lambda \simeq \mathbb{C}$.

La 2-forme de Kirillov de l'orbite $\mathcal{O}_\lambda$ s'écrit dans la carte donnée par ψ_λ :

$$\omega_\lambda = \frac{i}{2|\lambda|}\, dz \wedge d\bar{z}.$$

3.3. Soit χ_λ le prolongement de χ_λ^0 à P_ε défini par

$$\chi_\lambda\left(\exp(\beta(v_1 + i\,\varepsilon\, v_2) + \gamma\, v_3)\right) = e^{i\gamma\lambda}$$

pour $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. On forme alors le fibré holomorphe $L_\lambda = H^{\mathbb{C}} \times \chi_\lambda\, \mathbb{C}$ au-dessus de $\mathcal{O}_\lambda \simeq \mathbb{C}$ que l'on trivialise au moyen de la section holomorphe $s^0 : z \to [\sigma_\lambda(z), 1]$. On munit L_λ de la connexion ∇^λ donnée par

$$\nabla_X^\lambda(f.s^0) = \left(X(f)(z) + \alpha_\lambda(X)(z) f(z)\right) s^0(z)$$

où $\alpha_\lambda = -(\overline{z}/2|\lambda|)dz$ et de la structure hermitienne ∇^λ-invariante h_λ définie par

$$h_\lambda(z)(s^0(z), s^0(z)) = \exp(-z\overline{z}/2|\lambda|).$$

Les sections du fibré L_λ polarisées pour la polarisation géométrique de $\mathbb{D}$ induite par $\mathcal{P}_\varepsilon$ sont les sections holomorphes de L_λ. L'action naturelle de H sur ces sections permet d'obtenir une représentation unitaire irréductible de H dans l'espace de Hilbert des sections holomorphes s telles que

$$\|s\|^2 = \int_{\mathbb{C}} h_\lambda(z)(s(z), s(z))\, \omega_\lambda(z) < +\infty.$$

En utilisant la trivialisation précédente de L_λ, on va donner une réalisation ρ_λ de cette représentation dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$ des fonctions entières $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_\lambda^2 = \frac{1}{2\pi|\lambda|} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, e^{-|z|^2/2|\lambda|}\, dx\, dy < +\infty$$

où $dx\, dy$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

On obtient

$$\rho_\lambda([a,b,c])\, f(z) = \exp(ic\,\lambda + \frac{1}{4}(\varepsilon b + ai)(2z + (-b + \varepsilon\, ai)\lambda)\, f(z + \lambda(-b + \varepsilon\, ai))\,.$$

Une base hilbertienne de $\mathcal{H}_\lambda$ est formée par les fonctions $f_k^\lambda(z) = (1/\sqrt{(2|\lambda|)^k\, k\,!})\, z^k$ où $k \in \mathbb{N}$.

3.4. Soit $t \in \mathbb{C}$. L'évaluation $f \to f(t)$ étant une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$ (voir [F] par exemple), il existe un "état cohérent" $e_t^\lambda \in \mathcal{H}_\lambda$ tel que

$$< f, e_t^\lambda >_\lambda = f(t)$$

pour tout f dans $\mathcal{H}_\lambda$. On obtient :

$$e_t^\lambda(z) = \exp\left((1/2|\lambda|)\, z\, \overline{t}\right).$$

Si A est un opérateur de $\mathcal{H}_\lambda$, on peut alors définir, comme au paragraphe précédent, le symbole de Berezin $s_\lambda\,(A)$ de A et le symbole double de Berezin $S_\lambda\,(A)$ qui sont des fonctions définies respectivement sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{C}^2$.

On dispose également des formules intégrales analogues à celles du 2.3. permettant d'exprimer, si f et g appartiennent à $\mathcal{H}_\lambda$, $A\,(f)$ et $< A\,(f)\,,\, g >_\lambda$ à partir de $S_\lambda\,(A)$. En particulier, on a

$$S_\lambda\,(\rho_\lambda\,([a,b,c]))(z,z') = \exp\left(ic\,\lambda + \frac{1}{2}\,(\varepsilon\, b + i\, a)\, z + \frac{1}{2}\,(-\varepsilon\, b + a\, i)\, \overline{z}' - \frac{|\lambda|}{4}\,(a^2 + b^2)\right)$$

pour a, b, c, dans $\mathbb{R}$ et z, z' dans $\mathbb{C}$. D'autre part, la différentielle $d\rho_\lambda$ de la représentation ρ_λ étant donnée par

$$\begin{aligned}(d\rho_\lambda\,(v_1)\,f)(z) &= \frac{1}{2}\,i\,z\;f(z) + \lambda\,\varepsilon\,i\;f'(z)\\ (d\rho_\lambda\,(v_2)\,f)(z) &= \frac{1}{2}\,\varepsilon\,z\;f(z) - \lambda\;f'(z)\\ (d\rho_\lambda\,(v_3)\,f)(z) &= i\,\lambda\;f(z)\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}S_\lambda\,(d\rho_\lambda\,(v_1))(z,z') &= i\,\frac{z+\overline{z}'}{2}\\ S_\lambda\,(d\rho_\lambda\,(v_2))(z,z') &= \varepsilon\,\frac{z-\overline{z}'}{2}\\ S_\lambda\,(d\rho_\lambda\,(v_3))(z,z') &= i\,\lambda\end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$s_\lambda\,(d\rho_\lambda\,(X))(z) = i\widetilde{X}\,(\psi_\lambda\,(z))$$

pour $X \in \mathfrak{h}$, $z \in \mathbb{C}$.

Le calcul de Berezin induit donc ici un calcul symbolique adapté au-dessus de l'orbite $\mathcal{O}_\lambda \simeq \mathbb{C}$ tout comme la transformation de Weyl définit un calcul symbolique adapté au-dessus de $\mathcal{O}_\lambda \simeq \mathbb{R}^2$ lorsque l'on réalise la représentation de H associée à l'orbite $\mathcal{O}_\lambda$ comme induite unitaire en utilisant des polarisations réelles [W]. Le lien entre les calculs de Berezin et de Weyl (et donc l'entrelacement entre ces réalisations) est étudié dans [ACGZ] dans le cas d'un groupe de Heisenberg de dimension quelconque.

3.5. Les fonctions quantifiables sont ici les fonctions du type $\varphi(z)u(z) + v(z)\overline{z}$ où u et v sont des fonctions entières. La quantification géométrique associe à une telle fonction φ l'opérateur $W^\lambda(\varphi)$ de $\mathcal{H}_\lambda$ défini par

$$W^\lambda(\varphi) = i\nabla^\lambda_{X_\varphi} + \varphi 2|\lambda|\partial_z + u.$$

Le symbole de Berezin de $W^\lambda(\varphi)$ est alors la fonction φ.

4. Contraction de $SU(1,1)$ vers le groupe de Heisenberg

Soit r un réel strictement positif. On note C_r l'application linéaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ définie par

$$C_r\,(v_1) = r\,u_1 \quad , \quad C_r\,(v_2) = r\,u_2 \quad , \quad C_r\,(v_3) = r^2\,u_3$$

et c_r l'application de H dans G définie par

$$c_r\,(\exp_H\, X) = \exp_G\, C_r\,(X)\,.$$

pour tout X élément de $\mathfrak{h}$. La différentielle de c_r en l'identité de H est C_r et on a, pour X et Y éléments de $\mathfrak{h}$:

$$\lim_{r\to 0} C_r^{-1}\,[C_r\,(X)\,,\,C_r\,(Y)]_{\mathfrak{g}} = [X,Y]_{\mathfrak{h}}\,,$$

ce qui exprime que la famille $(C_r)_{r>0}$ est une contraction de $\mathfrak{g}$ vers $\mathfrak{h}$ [D].

On en déduit, en utilisant notamment le fait que l'application exponentielle réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ dans un voisinage de l'identité dans G, la proposition suivante :

Proposition 4.1. *1) Il existe un voisinage ouvert V de l'identité de G tel que, pour tout $r>0$, c_r est un difféomorphisme de $c_r^{-1}\,(V^2)$ dans V^2.*
2) Pour tout x dans H, il existe $r_0>0$ tel que, pour tout $r<r_0$, $c_r\,(x)\in V$.
3) Pour tout $r>0$, $c_r\,([0,0,0]) = g\,(1,0)$.
4) Soient x, y dans H. Il existe $r_1>0$ tel que, pour tout $r<r_1$, $c_r^{-1}\,(c_r\,(x)\,c_r\,(y)^{-1})$ est bien défini et on a :

$$\lim_{r\to 0} c_r^{-1}\,(c_r\,(x)\,c_r\,(y)^{-1}) = xy^{-1}\,.$$

On dit alors, suivant [MN], Définition 1, que la famille $(c_r)_{r>0}$ est une contraction de G vers H, la famille $(C_r)_{r>0}$ étant la contraction de $\mathfrak{g}$ vers $\mathfrak{h}$ associée. On donne à présent un résultat technique qu'on utilisera plus loin.

Proposition 4.2. *Soient $g_n = g(\alpha_n,\beta_n)$ une suite d'éléments de G, $[a,b,c]$ un élément de H et $(r\,(n))$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il y a équivalence entre*
(1) la suite g_n tend vers l'identité de G et la suite $(c_{r(n)}^{-1}\,(g_n))$ tend vers $[a,b,c]$ dans H
et
(2) $\lim_{n\to+\infty} (r\,(n)^{-1}\,\beta_n) = \frac{1}{2}\,(b-a\,i)$ et $\lim_{n\to+\infty} r\,(n)^{-2}\,(\alpha_n-1) = \frac{1}{8}\,(a^2+b^2) - i\frac{c}{2}$.

Preuve. Notons U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}$ et U' un voisinage ouvert de l'identité dans G tels que l'exponentielle réalise un difféomorphisme de U dans U' dont on note log le difféomorphisme inverse. Supposons que (1) soit vérifié. Pour n assez grand, g_n appartient à U' et $c_{r(n)}^{-1}\,(g_n) = \exp_H\, C_{r(n)}^{-1}\,(\log\, g_n)$ est un élément de H bien défini que l'on notera $[a_n,b_n,c_n]$. Comme

$$g_n = c_{r(n)}\,([a_n,b_n,c_n]) = \exp_G\,(r(n)\,a_n\,u_1 + r(n)\,b_n\,u_2 + r(n)^2\,c_n\,u_3)$$

on obtient, par un calcul simple,

$$g_n = g\left(\cosh R(n) - i\,\frac{r(n)^2\,c_n \sinh R(n)}{2R(n)} \quad , \quad (b_n - i\,a_n)\,\frac{r(n)\sinh R(n)}{2R(n)}\right)$$

où $R(n)$ est tel que $R(n)^2 = \frac{1}{4}\, r(n)^2 (a_n^2 + b_n^2 - r(n)^2\, c_n^2)$, d'où l'on déduit aisément (2).

Réciproquement, partant de (2), on a immédiatement que g_n tend vers l'identité de G. On vérifie alors que $C_{r(n)}^{-1}\,(\log g_n)$ tend vers $a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3$ à l'aide d'un développement limité de $\log g_n$ par rapport à $r(n)$, d'où (1).

Remarque 4.3. Si $(r(n))$ est une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 et $[a,b,c] = \exp_H\,(a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3)$ est un élément de H, la suite (g_n) de G définie par

$$g_n = \exp_G\, C_{r(n)}\,(a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3) = c_{r(n)}\,([a,b,c])\,.$$

satisfait aux conditions du lemme précédent.

5. Contraction d'orbites coadjointes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On a vu que l'orbite $\mathcal{O}_n$ de l'élément $(n/2)u_3^*$ de $\mathfrak{g}^*$ sous l'action coadjointe de G est l'ensemble des points $x_1u_1^* + x_2u_2^* + x_3u_3^*$ de $\mathfrak{g}^*$ tels que $x_3 > 0$ et

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2\,.$$

Par suite, pour $r > 0$, l'image de $\mathcal{O}_n$ par la transposée C_r^* de l'application C_r est l'ensemble des points $x_1v_1^* + x_2v_2^* + x_3v_3^*$ de $\mathfrak{h}^*$ tels que $x_3 > 0$ et

$$r^2\,(-x_1^2 - x_2^2) + x_3^2 = \left(\frac{r^2 n}{2}\right)^2\,.$$

Fixons $\lambda > 0$ et supposons que r soit une fonction $r(n)$ de n telle que $\lim_{n\to+\infty}(n\,r(n)^2) = 2\lambda$. Lorqu'on fait tendre n vers $+\infty$ dans l'équation précédente, on obtient $x_3^2 = \lambda^2$ ce qui permet de dire suivant [D] que les ellipsoides $C_{r(n)}^*\,(\mathcal{O}_n)$ approximent la réunion des orbites $\mathcal{O}_\lambda$ et $\mathcal{O}_{-\lambda}$ *[D]*. On va alors utiliser les paramétrages des orbites $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{O}_\lambda$ obtenues aux paragraphes précédents pour traduire cela d'une manière plus précise ce qui permettra plus loin d'établir un lien entre le comportement des orbites par contraction et celui des représentations associées. On obtient aisément :

Proposition 5.1. *Soient $\lambda > 0$ et $(r(n))_{n>0}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim_{n\to+\infty}(nr(n)^2) = 2\lambda$.*
1) On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to+\infty} C_{r(n)}^*\left(\psi_n\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda n}}\right)\right) = \psi_\lambda\,(z)$$

ce qui s'écrit également

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{C_{r(n)}(X)}\left(\psi_n\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda n}}\right)\right) = \widetilde{X}\left(\psi_\lambda(z)\right)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ *et tout* $X \in \mathfrak{h}$.
2) Inversement, si la suite de points $\xi_n = \psi_n(z_n)$ $(z_n \in \mathbb{D})$ *de* $\mathcal{O}_n$ *est telle que la suite* $C^*_{r(n)}(\xi_n)$ *converge vers le point* $\xi = \psi_\lambda(z)$ *dans* $\mathfrak{h}^*$, *alors* z_n *est équivalent à* $z/\sqrt{2\lambda n}$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

De manière analogue, on a

Proposition 5.2. *Soient* $\lambda < 0$ *et* $(r(n))_{n<0}$ *une suite de réels strictement positifs tels que* $\lim_{n\to-\infty}(nr(n)^2) = 2\lambda$.
1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to-\infty} C^*_{r(n)}\left(\psi_n\left(\frac{z}{\sqrt{2|\lambda n|}}\right)\right) = \psi_\lambda\left(-z\right)$$

ou encore

$$\lim_{n\to-\infty} \widetilde{C_{r(n)}(X)}\left(\psi_n\left(\frac{z}{\sqrt{2|\lambda n|}}\right)\right) = \widetilde{X}\left(\psi_\lambda(-z)\right)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ *et tout* $X \in \mathfrak{h}$.
2) Inversement si la suite de points $\xi_n = \psi_n(z_n)$ $(z_n \in \mathbb{D})$ *de* $\mathcal{O}_n$ *est telle que la suite* $C^*_{r(n)}(\xi_n)$ *converge vers le point* $\xi = \psi_\lambda(-z)$ *dans* $\mathfrak{h}^*$, *alors* z_n *est équivalent à* $z/\sqrt{2|\lambda n|}$ *lorsque* n *tend vers* $-\infty$.

6. Contraction de calculs de Berezin

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note B_n l'isomorphisme unitaire de $\mathcal{H}_\lambda$ dans $\mathcal{H}_n$ tel que $B_n\, f_p^\lambda = f_p^n$ pour p entier positif.

Proposition 6.1. *Soit, pour tout* n *entier* ≥ 2, *un opérateur* A_n *de* $\mathcal{H}_n$ *et soit* A *un opérateur de* $\mathcal{H}_\lambda$. *On suppose que la suite* $(\|A_n\|_{op})$*est bornée et que, pour tous* z *et* z' *dans* $\mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(A_n)\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda n}}, \frac{z'}{\sqrt{2\lambda n}}\right) = S_\lambda\left(A\right)(z,z').$$

On a
1) Pour tous entiers positifs p *et* q, $\lim_{n\to+\infty} < A_n f_p^n, f_q^n >_n = < A f_p^\lambda, f_q^\lambda >_\lambda$.

2) On suppose de plus que la série $\sum_{q\geq 0}\sup_{n\geq 2} \mid < A_n\, f_p^n\, ,\, f_q^n >_n \mid^2$ *est convergente. Alors, pour tout* f *dans* $\mathcal{H}_\lambda$*,*

$$\lim_{n\to+\infty} \|B_n^{-1}A_nB_n\, f - A\, f\|_\lambda = 0.$$

Preuve. 1) On écrit la dernière formule du paragraphe 2.4 dans le cas où $f = f_p^n$ et $g = f_q^n$ et on fait dans l'intégrale du second membre le changement de variables $(z, z') \to (z/\sqrt{2\lambda n}\, ,\, z'/\sqrt{2\lambda n})$. On obtient :

$$< A_n f_p^n, f_q^n >_n = \frac{1}{(2\lambda\pi)^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \int_{D(0,\sqrt{2\lambda n})^2} I_n\,(z,z')\, dx\, dy\, dx'\, dy'$$

où $I_n(z, z')$ désigne

$$f_p^m\left(\frac{z'}{\sqrt{2\lambda\, n}}\right)\overline{f_q^n\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda n}}\right)} < A_n\, e^n_{z'/\sqrt{2\lambda n}}, e^n_{z/\sqrt{2\lambda n}} >_n \left((1-\frac{z\overline{z}}{2\lambda n})(1-\frac{z'\overline{z}'}{2\lambda n})\right)^{n-2}.$$

On remarque que

$$f_p^n\left(\frac{z'}{\sqrt{2\lambda n}}\right) = \sqrt{C_{n+p-1}^p}\,\frac{z'^p}{(\sqrt{2\lambda n})^p} = \frac{1}{\sqrt{(2\lambda)^p p!}}\sqrt{\frac{n(n+1)\cdots(n+p-1)}{n^p}}\, z'^p$$

tend vers $f_p^\lambda(z')$ lorsque n tend vers $+\infty$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n\,(z,z') = f_p^\lambda(z')\,\overline{f_q^\lambda\,(z)} < A\, e_{z'}^\lambda\, ,\, e_z^\lambda >_\lambda\ e^{-|z|^2/2\lambda}\, e^{-|z'|^2/2\lambda}.$$

Pour appliquer le théorème de la convergence dominée à l'intégrale ci-dessus, on remarque que, pour $|z| \leq \sqrt{2\lambda n}$ et $|z'| \leq \sqrt{2\lambda n}$:

$$\begin{aligned} | < A_n\, e^n_{z'/\sqrt{2\lambda n}}\, ,\, e^n_{z/\sqrt{2\lambda n}} >_n| &\leq \|A_n\, e^n_{z'/\sqrt{2\lambda n}}\|_n . \|e^n_{z/\sqrt{2\lambda n}}\|_n \\ &\leq C\|e^n_{z'/\sqrt{2\lambda n}}\|_n . \|e^n_{z/\sqrt{2\lambda n}}\|_n \\ &\leq C\left(1-\frac{z'\overline{z}'}{2\lambda n}\right)^{-n/2}\left(1-\frac{z\overline{z}}{2\lambda n}\right)^{-n/2} \end{aligned}$$

où C est une constante, ce qui donne

$$\begin{aligned} |I_n(z,z')| &\leq C'|z'|^p\, |z|^q\left(1-\frac{z'\overline{z}'}{2\lambda n}\right)^{\frac{n}{2}-2}\left(1-\frac{z\overline{z}}{2\lambda n}\right)^{\frac{n}{2}-2} \\ &\leq C'|z'|^p\, |z|^q e^{-|z|^2/8\lambda} e^{-|z'|^2/8\lambda} \end{aligned}$$

C' désignant une constante. En effet, on peut remarquer que, si $n \geq 8$,

$$\left(1-\frac{z\overline{z}}{2\lambda n}\right)^{\frac{n}{2}-2} \leq \left(1-\frac{z\overline{z}}{2\lambda n}\right)^{\frac{n}{4}} \leq e^{-|z|^2/8\lambda}$$

pour $|z| < \sqrt{2\lambda n}$.
On peut alors conclure :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} < A_n\, f_p^n\,,\, f_q^n >_n &= \frac{1}{(2\lambda\pi)^2}\int_{\mathbb{C}^2}\lim_{n\to+\infty} I_n(z,z')dxdydx'dy' \\ &= < A\, f_p^\lambda\ f_q^\lambda >_\lambda\ .\end{aligned}$$

2) Par linéarité et densité, il suffit de montrer le résultat pour $f = f_p^\lambda$ où p est un entier positif. Comme

$$B_n^{-1}A_nB_n\, f_p^\lambda = \sum_{q\geq 0} < A_n\, f_p^n\,,\, f_q^n >_n\ f_q^\lambda$$

on a

$$\|B_n^{-1}A_nB_n\, f_p^\lambda - A\, f_p^\lambda\|_\lambda^2 = \sum_{q\geq 0} |< A_n\, f_p^n\,,\, f_q^n >_n - < A\, f_p^\lambda\,, f_q^\lambda >_\lambda|^2.$$

Posons pour simplifier $u_n(q) =< A_n\, f_p^n\,,\, f_q^n >_n$ et $u(q) =< A\, f_p^\lambda\,,\, f_q^\lambda >_\lambda$. On va montrer qu'il existe une série convergente $\sum_{q\geq 0} w(q)$ telle que pour tous n et q, $|u_n(q) - u(q)|^2 \leq w(q)$, ce qui compte tenu de 1) permettra de conclure. Posons également $v(q) = \sup_{n\geq 2} |< A_n\, f_p^n\,,\, f_q^n >_n|$. La série $\sum_{q\geq 0} v(q)^2$ converge et d'autre part, pour tous n et q :

$$\begin{aligned}|u_n(q) - u(q)|^2 &\leq |u_n(q)|^2 + |u(q)|^2 + 2|u_n(q)||u_(q)| \\ &\leq v(q)^2 + |u(q)|^2 + 2v(q)|u(q)|\,.\end{aligned}$$

La série qui a pour terme général le second membre de cette dernière inégalité converge, ce qui termine.

7. Contraction de la série discrète de $SU(1,1)$

Soient λ un réel strictement positif et $(r(n))_{n\geq 2}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\, r(n)^2) = 2\lambda$. On va montrer ici que les représentations $(\pi_n)_{n\geq 2}$ de G se contractent vers la représentation ρ_λ de H au sens de [MN].

Proposition 7.1. *Soient (g_n) une suite de G convergeant vers l'identité de G et h un élément de H tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_{r(n)}^{-1}(g_n) = h$. Pour z et z' dans $\mathbb{C}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\pi_n(g_n))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda n}}\,,\, \frac{z'}{\sqrt{2\lambda n}}\right) = S_\lambda\,(\rho_\lambda\,(h))(z,z').$$

En particulier, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n\,(\pi_n\,(g_n))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda n}}\right) = s_\lambda\,(\rho_\lambda\,(h))(z).$$

Preuve. Cela découle des expressions des symboles doubles de Berezin des opérateurs $\pi_n(g)\,(g \in G)$ et $\rho(h)\,(h \in H)$ des paragraphes 2 et 3 et de la proposition 4.2.

On va déduire des propositions 6.1 et 7.1 le résultat suivant:

Proposition 7.2. *Soient (g_n) une suite de G convergeant vers l'identité de G et h un élément de H tels que $\lim_{n\to+\infty} c_{r(n)}^{-1}(g_n) = h$.*
1) Pour tous entiers positifs p et q, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} < \pi_n\,(g_n)\, f_p^n\,,\, f_q^n >_n = < \rho_\lambda\,(h)\, f_p^\lambda\,,\, f_q^\lambda >_\lambda\ .$$

2) Pour tout élément f de $\mathcal{H}_\lambda$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|(B_n^{-1}\,\pi_n\,(g_n)\,B_n)\,f - \rho_\lambda\,(h)\,f\|_\lambda = 0\,.$$

Preuve. Le point 1) résulte immédiatement de la proposition 7.1 et du point 1) de la proposition 6.1 appliqué aux opérateurs $A_n = \pi(g_n)$. Pour déduire le point 2) du point 2) de la proposition 6.1, nous allons montrer que, si p est un entier positif donné, il existe une série convergente $\sum_{q\geq 0} v(q)$ telle que, pour tous $n \geq 0$ et $q \geq 0$,

$$|< \pi_n\,(g_n)\, f_p^n\,,\, f_q^n >_n|^2 \leq v(q).$$

Posons $g_n = g(\alpha_n, \beta_n)$. On a :

$$\begin{aligned}
(\pi_n(g_n)f_p^n)(z) &= \sqrt{C_{n+p-1}^p}(-\overline{\beta}_n z + \alpha_n)^{-n-p}(\overline{\alpha}_n z - \beta_n)^p \\
&= \sqrt{C_{n+p-1}^p}(-\overline{\beta}_n z + \alpha_n)^{-n-p}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \overline{\alpha}_n^k(-\beta_n)^{p-k}z^k \\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}C_p^k\, u_k(z)
\end{aligned}$$

où l'on a posé pour $0 \leq k \leq p$:

$$\begin{aligned}
u_k(z) &= \sqrt{C_{n+p-1}^p}\,\overline{\alpha}_n^k\beta_n^{p-k}z^k(-\overline{\beta}_n z + \alpha_n)^{-n-p} \\
&= \sqrt{C_{n+p-1}^p}\,\overline{\alpha}_n^k\beta_n^{p-k}\alpha_n{}^{-n-p}\sum_{l\geq 0} C_{n+p+l-1}^l\left(-\frac{\overline{\beta}_n}{\alpha_n}\right)^l z^{k+l}.
\end{aligned}$$

Par suite

$$< u_k, f_{l+k}^n >_n = \sqrt{C_{n+p-1}^p}\,\overline{\alpha}_n^k\beta_n^{p-k}\alpha_n{}^{-n-p}\frac{C_{n+p+l-1}^l}{\sqrt{C_{n+k+l-1}^{k+l}}}\left(-\frac{\overline{\beta}_n}{\alpha_n}\right)^l.$$

et

$$|< u_k, f^n_{l+k} >_n|^2 = C^p_{n+p-1}|\alpha_n|^{2(k-p-n)}|\beta_n|^{2(p-k)}|\beta_n\alpha_n{}^{-1}|^{2l}\,\frac{(C^l_{n+p+l-1})^2}{C^{k+l}_{n+k+l-1}}.$$

Compte tenu de l'hypothèse sur la suite (g_n), il existe des constantes positives c_1, c_2 et c_3 telles que, pour tout $n \geq 0$,

$$|\alpha_n|^{2(k-p-n)} \leq c_1, \quad |\beta_n|^{2(p-k)} \leq c_2\, n^{k-p}, \quad |\beta_n\alpha_n{}^{-1}|^{2l} \leq c_3{}^l\, n^{-l}.$$

Il existe également une constante c_4 telle que $C^p_{n+p-1} \leq c_4\, n^p$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{(C^l_{n+p+l-1})^2}{C^{k+l}_{n+k+l-1}} & \frac{(n-1)!}{(n+p-1)!}.\frac{(n+p+l-1)!}{(n+p-1)!}.\frac{(n+p+l-1)!}{(n+l+k-1)!}.\frac{(l+k)!}{l!^2}\\ \leq \quad & n^{-p}.(n+p+l-1)^l.(n+p+l-1)^{p-k}.\frac{(l+k)!}{l!^2}.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Stirling on peut trouver une constante c_5 telle que, pour tout entier $l \geq 1$,

$$\frac{(l+k)!}{l!^2} \leq c_5\, e^{3l} l^{-l}.$$

Au total, on obtient

$$|< u_k, f^n_{l+k} >_n|^2 \leq c_6\, n^{-p+k-l}(n+p+l-1)^{p-k+l} c_3{}^l e^{3l} l^{-l}.$$

Choisissons alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon c_3 e^3 < 1$. Il existe un entier positif N tel que, pour tout $l \geq N$ et tout $n \geq N$,

$$\frac{1}{l} + \frac{p+l-1}{nl} \leq \varepsilon$$

et par suite

$$\begin{aligned}|< u_k, f^n_{l+k} >_n|^2 \quad & \leq \quad c_6 \left(1 + \frac{p+l-1}{n}\right)^{p-k} \left(\frac{1}{l} + \frac{p+l-1}{nl}\right)^l c_3{}^l e^{3l}\\ & \leq \quad c_6 \left(1 + \frac{p+l-1}{N}\right)^{p-k} (\varepsilon c_3 e^3)^l\end{aligned}$$

ce qui termine.

Supposons à présent que λ soit un réel strictement négatif. On rappelle que l'espace $\mathcal{H}_\lambda$ de la représentation ρ_λ coïncide avec l'espace $\mathcal{H}_{-\lambda}$ de la représentation $\rho_{-\lambda}$. Notons τ l'opérateur (unitaire) de $\mathcal{H}_\lambda$ défini par $\tau(f)(z) = f(-z)$ et par $\widetilde{\rho}_\lambda$ la représentation de H dans $\mathcal{H}_\lambda$ équivalente à ρ_λ définie par $\widetilde{\rho}_\lambda(h) = \tau \circ \rho_\lambda(h) \circ \tau$ $(h \in H)$. En utilisant la proposition 7.2 et le fait que $\pi_n(g(\alpha,\beta)) = \pi_{-n}(g(\overline{\alpha},\overline{\beta}))$ pour

$g(\alpha,\beta)\in G$, on montre que les représentations $(\pi_n)_{n\leq -2}$ de G se contractent vers la représentation $\widetilde{\rho}_\lambda$ de H. Plus précisément :

Proposition 7.3. *Soient $\lambda<0$ et $(r(n))_{n\leq -2}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to-\infty}(n\,r(n)^2)=2\lambda$. Soient (g_n) une suite de G convergeant vers l'identité de G et h un élément de H tels que $\lim\limits_{n\to-\infty} c^{-1}_{r(n)}(g_n)=h$.*
1) Pour z et z' dans $\mathbb{C}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\pi_n(g_n))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda n}}\,,\,\frac{z'}{\sqrt{2\lambda n}}\right)=S_\lambda\,(\rho_\lambda\,(h))(-z,-z')=S_\lambda\,(\widetilde{\rho}_\lambda\,(h))(z,z').$$

2) Pour tous entiers positifs p et q, on a :

$$\lim_{n\to-\infty} <\pi_n\,(g_n)\,f^n_p\,,\,f^n_q>_n=<\widetilde{\rho}_\lambda\,(h)\,f^\lambda_p\,,\,f^\lambda_q>_\lambda\ .$$

3) Pour tout f dans $\mathcal{H}_\lambda$, on a

$$\lim_{n\to-\infty}\|(B^{-1}_{-n}\,\pi_n\,(g_n)\,B_{-n})\,f-\widetilde{\rho}_\lambda\,(h)\,f\|_\lambda=0\,.$$

On termine en traduisant en termes de fonctions spéciales le point 1) de la proposition 7.2 ce qui donne comme dans [DR1] et [R] une formule de type Mehler-Heine. On utilise ici les notations de [KV] relatives aux polynômes de Jacobi et de Laguerre.

Proposition 7.4. *Soient p et q deux entiers positifs tels que $q\leq p$ et x un réel. On a*

$$\lim_{n\to+\infty} P_q^{(p-q,-n-p-q)}\,(\cosh\frac{2x}{\sqrt{n}})=L_q^{p-q}(x^2).$$

Preuve. Soit u un réel et $g=g(\cosh u,\sinh u)\in G$. En passant en coordonnées polaires et en effectuant un développement en série dans l'intégrale donnant $<\pi_n\,(g)\,f^n_p\,,\,f^n_q>_n$ on obtient si $q\leq p$:

$$<\pi_n\,(g)\,f^n_p\,,\,f^n_q>_n=\sqrt{\frac{C^p_{n+p-1}}{C^q_{n+q-1}}}\int_0^{2\pi}(e^{i\theta}\sinh u+\cosh u)^{-n-p}(e^{i\theta}\cosh u+\sinh u)^p e^{-iq\theta}\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{C^p_{n+p-1}}{C^q_{n+q-1}}}\mathcal{P}^{-n/2}_{-n/2-q,-n/2-p}(\cosh 2u)\\
&= \sqrt{\frac{C^p_{n+p-1}}{C^q_{n+q-1}}}(\sinh u)^{p-q}(\cosh u)^{-n-p-q}P_q^{(p-q,-n-p-q)}(\cosh 2u)
\end{aligned}$$

avec les notations de [KV], chapitre 6.

D'autre part, en utilisant [KV], p. 453, on vérifie que, si $h=[0,x,0]\in H$,

$$< \rho_\lambda\,(h)\, f_p^\lambda\;,\; f_q^\lambda >_\lambda = \sqrt{\frac{(2\lambda)^q q!}{(2\lambda)^p p!}}(-1)^{p+q}(\lambda x)^{p-q}e^{-x^2\lambda/4}L_q^{p-q}(\frac{1}{2}x^2\lambda).$$

On obtient alors le résultat annoncé en appliquant la proposition 7.2 1) à la suite $g_n = g(\cosh(\sqrt{\lambda/2n}\,x), \sinh(\sqrt{\lambda/2n}\,x))$ et à $h=[0,x,0]$.

8. Contraction des différentielles

Soient λ un réel strictement positif et $(r(n))_{n\geq 2}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim_{n\to+\infty}(n\,r(n)^2)=2\lambda$. On a immédiatement

Proposition 8.1. *Pour X dans $\mathfrak{h}$, z et z' dans $\mathbb{C}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(d\pi_n(C_{r(n)}(X)))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda n}}\,,\,\frac{z'}{\sqrt{2\lambda n}}\right) = S_\lambda\,(d\rho_\lambda\,(X))(z,z').$$

En particulier, pour z dans $\mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n\,(d\pi_n\,(C_{r(n)}(X)))\left(\frac{z}{\sqrt{2\lambda n}}\right) = s_\lambda\,(\rho_\lambda\,(X))(z).$$

Remarquons que la proposition précédente est la traduction en termes de symboles de Berezin de la proposition 5.1. On peut alors énoncer un résultat analogue à la proposition 7.2 au niveau infinitésimal :

Proposition 8.2. *Pour $X\in\mathfrak{h}$ et P polynôme,*

$$\lim_{n\to+\infty} \|B_n^{-1}\,d\pi_n\,(C_{r(n)}(X))\,B_n\,P - d\rho_\lambda(X)\,P\|_\lambda = 0\,.$$

Preuve. On commence par établir par une méthode similaire à celle de la preuve du point 1) de la proposition 6.1 que pour tous p et q entiers positifs et pour tout X dans $\mathfrak{h}$,

$$\lim_{n\to+\infty} < d\pi_n\,(C_{r(n)}(X))\,f_p^n\;,\;f_q^n >_n = < d\rho_\lambda\,(X)\,f_p^\lambda\;,\;f_q^\lambda >_\lambda\;.$$

On obtient alors le résultat annoncé en remarquant que, pour p entier positif et X élément de $\mathfrak{h}$ donnés, $\|B_n^{-1}d\pi_n(C_{r(n)}(X))B_n f_p^\lambda - d\rho_\lambda(X)f_p^\lambda\|_\lambda^2$ peut s'écrire

$$\sum_{q\geq 0} |< d\pi_n(C_{r(n)}(X))\,f_p^n, f_q^n >_n - < d\rho_\lambda(X)\,f_p^\lambda, f_q^\lambda >_\lambda|^2$$

la somme du second membre étant en fait finie compte tenu des expressions de $d\pi_n$ et $d\rho_\lambda$ données dans les paragraphes 2.5 et 3.4.

Le résultat précédent peut aussi se retrouver à partir de la proposition suivante relative à la contraction de fonctions quantifiables.

Proposition 8.3. *Soient $\varphi_n(z) = (1-z\overline{z})^{-1}(u_n(z)+v_n(z)\overline{z})$ une suite de fonctions quantifiables sur $\mathbb{D}$ (voir 2.6) et $\varphi(z) = u(z)+v(z)\overline{z}$ une fonction quantifiable sur $\mathbb{C}$ (voir 3.5). On suppose que, pour tout compact K de $\mathbb{C}$, la suite $\varphi_n(z/\sqrt{2\lambda n})$ converge uniformément sur K vers la fonction $\varphi(z)$.*
1) Pour tous p et q entiers positifs, on a

$$\lim_{n\to+\infty} < W(\varphi_n)\, f_p^n \,,\, f_q^n >_n = < W(\varphi)\, f_p^\lambda \,,\, f_q^\lambda >_\lambda \ .$$

2) Si on suppose de plus qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout n, u_n et v_n sont des polynômes de degré inférieur ou égal à n_0, alors, pour tout polynôme P,

$$\lim_{n\to+\infty} \|B_n^{-1}\, W(\varphi_n)\, B_n\, P - W(\varphi)\, P\|_\lambda = 0\,.$$

Preuve. 1) Posons $u_n(z) = \sum_{k\geq 0} u_k^n z^k$, $v_n(z) = \sum_{k\geq 0} v_k^n z^k$, $u(z) = \sum_{k\geq 0} u_k z^k$ et $v(z) = \sum_{k\geq 0} v_k z^k$. En considérant les intégrales

$$\int_{|z|=R} u_n(\frac{z}{\sqrt{2\lambda n}}) - u(z) + \overline{z}(v_n(\frac{z}{\sqrt{2\lambda n}}) - v(z))\; dz$$

pour $R \in]0,1[$, on voit que l'hypothèse sur la suite (φ_n) implique que $\lim_{n\to+\infty}(1/\sqrt{2\lambda n})^k u_k^n = u_k$ et $\lim_{n\to+\infty}(1/\sqrt{2\lambda n})^{k+1} v_k^n = v_k$.

D'autre part, d'après les expressions de $W(\varphi_n)$ et $W(\varphi)$ données plus haut, on a, si $q<p$, $< W(\varphi_n)\, f_p^n \,,\, f_q^n >_n = 0$ et, si $q\geq p$,

$$< W(\varphi_n)\, f_p^n \,,\, f_q^n >_n = \sqrt{\frac{C_{n+p-1}^p}{C_{n+q-1}^q}}((1+\frac{p}{n})u_{q-p}^n + \frac{p}{n}v_{q-p}^n)$$

qui tend, lorsque n tend vers $+\infty$, vers

$$\sqrt{\frac{(2\lambda)^q q!}{(2\lambda)^p p!}}(u_{q-p} + 2\lambda p v_{q-p+1}) = < W(\varphi)\, f_p^\lambda \,,\, f_q^\lambda >_\lambda \ .$$

Le point 2) découle de

$$\|B_n^{-1}\, W(\varphi_n)\, B_n\, P - W(\varphi)\, P\|_\lambda^2 = \sum_{q\geq 0} |< W(\varphi_n)\, f_p^n \,,\, f_q^n >_n - < W(\varphi)\, f_p^\lambda \,,\, f_q^\lambda >_\lambda|^2$$

car la somme du second membre est finie.

Remarque 8.4. Soit λ un réel strictement négatif. On obtient aisément les résultats analogues aux propositions 8.1, 8.2 et 8.3 précédentes, décrivant la contraction de la suite de représentations $(d\pi_n)_{n\leq -2}$ vers la représentation $d\widetilde{\rho}_\lambda$.

Références

[ACG] Arnal D., Cahen M. and Gutt S., Representations of compact Lie groups and quantization by deformation, Acad. R. Belg. Bull. Sc. 5e série, LXXIV, 4-5 (1988) 123-141.

[ACGZ] Arnal D., Cahen M., Gutt S. and Zahir H., A Moyal type star product on Hermitian symmetric spaces, Acad. R. Belg. Bull. Sc. 6^{e} série, II, 1-3 (1991) 91-103.

[Ca1] Cahen B., Deformation Program for Principal Series Representation, Lett. Math. Phys. 36 (1996) 65-75.

[Ca2] Cahen B., Quantification d'une orbite massive d'un groupe de Poincaré généralisé, C.R. Acad. Sci. Paris t. 325, série I (1997) 803-806.

[Ca3] Cahen B., Quantification d'orbites coadjointes et théorie des contractions, Journ. Lie Theory 11 (2001) 257-272.

[Ca4] Cahen B., Contraction de SU(2) vers le groupe de Heisenberg et calcul de Berezin, Beitr. Algebra Geom. 44, 2 (2003) 581-603.

[CD] Cotton P. and Dooley A.H., Contraction of an Adapted Functional Calculus, Journ. Lie Theory 7, 2 (1997) 147-164.

[CiD] Cishahayo C. and De Bièvre S., On the contraction of the discrete series of $SU(1,1)$, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 43, 2 (1993) 551-567.

[CGR1] Cahen M., Gutt S. and Rawnsley J., Quantization on Kähler manifolds I : Geometric interpretation of Berezin quantization, J. Geom. Phys. 7, 1 (1990) 45-62.

[CGR2] Cahen M. Gutt S. and Rawnsley J., Quantization on Kähler manifolds III, Lett. Math. Phys. 30 (1994) 291-305.

[D] Dooley A.H., Contractions of Lie groups and applications to analysis, in "Topics in Modern Harmonic Analysis" Rome, Ist. di Alta Mat (1983) 483-515.

[DR1] Dooley A.H. and Rice J.W., On contractions of semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math Soc. 289, 1 (1985) 185-202.

[DR2] Dooley A.H. and Rice J.W., Contractions of rotation groups and their representations, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 94 (1983) 509-517.

[F] Folland B., Harmonic Analysis in Phase Space, Princeton Univ. Press, 1989.

[IW] Inonu E. and Wigner E.P., On the contraction of groups and their representations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39 (1953) 510-524.

[KV] Vilenkin N.Ja. and Klimyk A.V., Representations of Lie groups and special functions, volume 1, Kluwer acad. Publishers, 1991.

[MN] Mickelsson J. and Niederle J., Contractions of Representations of de Sitter Groups, Commun. math. Phys. 27 (1972) 167-180.

[Re] Renaud J., The contraction of the $SU(1,1)$ discrete series of representations by means of coherent states, Journ. Math. Phys. 37,7 (1996) 3168-3179.

[R] Ricci F., A Contraction of $SU(2)$ to the Heisenberg Group, Mh. Math. 101 (1986) 211-225.

[RR] Ricci F. and Rubin R.L., Transferring Fourier Multipliers from $SU(2)$ to the Heisenberg Group, Amer. Journ. Math. 108 (1986) 571-588.

[K] Kostant B., Quantization and unitary representations, in Lecture Notes in Math. 170, Springer Berlin (1970) 87-208.

[W] Wildberger N.J., Convexity and unitary representations of a nilpotent Lie group, Invent. Math. 89 (1989) 281-292.

[Wo] Woodhouse N.M.J., Geometric Quantization, Clarendon Press Oxford (1992).

Université de Metz,
Département de mathématiques,
Ile du Saulcy 57045 Metz cedex 01, France.
E-mail: cahen@poncelet.sciences.univ-metz.fr.