Propriété de Kazhdan et sous-groupes discrets de covolume infini

J.-F. Quint

Résumé

Soient G un groupe de Lie réel presque simple, de centre fini, de rang réel ≥ 2 et $G = K(\exp \mathfrak{a}^+)K$ une décomposition de Cartan de G. Si Γ est un sous-groupe discret Zariski dense de G, son indicateur de croissance a été défini dans [7] : c'est une fonction homogène concave d'un cône convexe de $\mathfrak{a}^+$ dans $\mathbb{R}_+$. Si Γ est un réseau de G, ψ_Γ est la restriction à $\mathfrak{a}^+$ de la somme ρ des racines positives multipliées par la dimension de leurs espaces poids. Nous montrons ici qu'il existe une forme linéaire θ de $\mathfrak{a}$, strictement positive sur $\mathfrak{a}^+ \setminus \{0\}$, ne dépendant que de G et telle que, pour tout sous-groupe discret Γ de G qui ne soit pas un réseau de G, $\psi_\Gamma \leq \rho - \theta$.

Introduction

Soit G un groupe de Lie réel presque simple de centre fini.

Soient X l'espace symétrique de G, muni d'une métrique riemannienne G-invariante, x un point de X et K son stabilisateur dans G. Si Γ est un sous-groupe discret Zariski dense de G, on note τ_Γ l'exposant de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-td(x,\gamma x)} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

C'est un réel > 0. L'exposant de convergence des réseaux de G ne dépend que de G. On le note τ_G.

Généralisant un phénomène observé par K. Corlette dans [2] pour les groupes de rang réel 1 ayant la propriété (T) de Kazhdan, E. Leuzinger a montré dans [5] que, si G avait la propriété (T), il existait un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout sous-groupe Γ discret de G qui ne soit pas un réseau, on ait $\tau_\Gamma \leq \tau_G - \varepsilon$.

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G tel que le plat maximal de X stable par $\exp \mathfrak{a}$ contienne x. Soit $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ une chambre de Weyl. Si Γ est un sous-groupe discret Zariski dense de G, nous avons introduit dans [7] son indicateur de croissance : c'est une fonction homogène concave positive, définie sur un cône convexe fermé de $\mathfrak{a}^+$. Elle permet, par exemple, de décrire les exposants de convergence de Γ par rapport à toutes les métriques finsleriennes G-invariantes de X. Si Γ est un réseau, son indicateur de croissance est la restriction à $\mathfrak{a}^+$ d'une forme linéaire ρ qui ne dépend que de G.

Nous démontrons ici :

Théorème. *Supposons G de rang réel ≥ 2. Il existe alors une forme linéaire θ, strictement positive sur $\mathfrak{a}^+ \setminus \{0\}$, telle que, pour tout sous-groupe discret Γ de G qui ne soit pas un réseau, on ait $\psi_\Gamma \leq \rho - \theta$.*

La démonstration de ce résultat repose sur une version forte de la propriété (T), établie par H. Oh dans [6] : il s'agit d'une estimation de la vitesse de décroissance dans G des coefficients matriciels associés aux vecteurs K-finis dans les représentations unitaires de G ne contenant pas de vecteurs G-invariants.

Partant de ce résultat, on utilisera le plan et les méthodes de [3], où A. Eskin et C. McMullen démontrent un résultat de comptage pour les réseaux de G. Précisément, étant donné un réseau Γ dans G, dans [3], on commence par établir, à partir du théorème de Howe-Moore un résultat d'équidistribution des translatés des K-orbites dans $\Gamma \backslash G$, puis on utilise cet énoncé pour estimer le nombre de points de Γ dans les parties K-invariantes à droite de G.

Ici, nous nous donnerons un sous-groupe discret Γ de G qui ne soit pas un réseau. Le théorème de Oh nous permettra de démontrer un résultat de disparition des translatés des K-orbites, la proposition 3.2. Nous en déduirons une majoration pour le comptage des points de Γ dans les parties K-invariantes à droite qui mènera à notre théorème.

Nous démontrerons aussi un analogue de ce résultat pour un groupe de Lie presque simple défini sur n'importe quel corps local $\mathbb{K}$ de caractéristique $\neq 2$.

Je tiens à remercier Y. Benoist qui a attiré mon attention sur ces questions et E. Leuzinger qui m'a communiqué son article [5].

1 Notations

Soit $\mathbb{K}$ un corps local de caractéristique différente de 2.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on le munit de la valeur absolue usuelle et on pose $q = e$ et, pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{K}$, $\omega(x) = -\log |x|$.

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, on note $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{K}$, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$ et q le cardinal du corps résiduel $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$ de $\mathbb{K}$; on note ω la valuation de $\mathbb{K}$ telle que $\omega(\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2) = 1$ et on munit $\mathbb{K}$ de la valeur absolue $x \mapsto q^{-\omega(x)}$.

Soient $\mathbf{G}$ un $\mathbb{K}$-groupe presque simple de $\mathbb{K}$-rang ≥ 2 et G le groupe de ses $\mathbb{K}$-points.

On choisit dans $\mathbf{G}$ un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal $\mathbf{A}$. On note A le groupe de ses $\mathbb{K}$-points, $\mathbf{Z}$ le centralisateur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{G}$ et Z le groupe des $\mathbb{K}$-points de $\mathbf{Z}$.

Soit X le groupe des caractères de $\mathbf{A}$. On note E l'espace vectoriel réel dual de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X$ et, pour χ dans X, on note χ^ω la forme linéaire associée sur E. On note ν l'unique homomorphisme continu de Z dans E tel que, pour tous a dans A et χ dans X, $\chi^\omega(\nu(a)) = -\omega(\chi(a))$.

Dorénavant, on identifie les éléments de X et les formes linéaires associées de E. Soit Σ l'ensemble des racines de $\mathbf{A}$ dans l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$. Alors Σ est un système de racines dans E^*. On choisit dans Σ un système de racines positives Σ^+. On note $E^+ \subset E$ la chambre de Weyl positive de Σ^+ et $Z^+ = \nu^{-1}(E^+)$. On note $\iota : E \to E$ l'involution d'opposition de E^+.

Enfin, on choisit dans G un bon sous-groupe compact maximal relativement à A, qu'on note K. On a la décomposition de Cartan $G = KZ^+K$ et, pour z_1,z_2 dans Z^+, z_1 appartient à Kz_2K si et seulement si $\nu(z_1) = \nu(z_2)$. On note μ l'unique application bi-K-invariante de G dans E^+ dont la restriction à Z^+ vaut ν. Pour g dans G, on a $\mu(g^{-1}) = \iota(\mu(g))$. On a :

Proposition 1.1 (Benoist, [1, 5.1]). *Pour toute partie compacte L de G, il existe une partie compacte M de E telle que, pour tout g dans G, on ait $\mu(LgL) \subset \mu(g) + M$.*

Nous allons appliquer à des problèmes de comptage dans G le résultat suivant de H. Oh. Il s'agit d'une quantification du fait que G possède la propriété (T) de Kazhdan :

Théorème 1.2 (Oh, [6]). *Il existe une fonction $\xi : E^+ \to \mathbb{R}_+$, invariante par ι, telle que*

(i) pour toute représentation de G dans un espace de Hilbert H sans vecteurs G-invariants, on ait, pour v,w K-invariants dans H et g dans G,

$$|\langle gv,w\rangle| \leq \xi(\mu(g))\,\|v\|\,\|w\|\,.$$

(ii) il existe une forme linéaire θ de E, strictement positive sur $E^+\setminus\{0\}$, et telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < c < d$ avec

$$\forall x \in E^+ \quad cq^{-\theta(x)} \leq \xi(x) \leq dq^{-(1-\varepsilon)\theta(x)}.$$

Dorénavant, on fixe de tels ξ et θ.

2 Divergence exponentielle des sous-groupes discrets

Nous rappelons ici les résultats de [7] sur le comportement de l'image par μ d'un sous-groupe discret de G.

Soient ν une mesure de Radon et N une norme sur E. Pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ de E, on note $\tau_{\mathcal{C}}$ l'exposant de convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_{\mathcal{C}} e^{-tN(x)}\mathrm{d}\nu(x) \quad (t \in \mathbb{R})$$

et, pour x dans E, on pose :

$$\psi_\nu(x) = N(x) \inf \tau_{\mathcal{C}},$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des cônes ouverts $\mathcal{C}$ de E qui contiennent x. La fonction ψ_ν ne dépend pas de la norme choisie. On l'appelle indicateur de croissance de ν.

Les deux résultats élémentaires suivants sont prouvés dans [7, 5.2] :

Lemme 2.1. *Soit $\theta : E \to \mathbb{R}$ une fonction homogène et continue. On a $\psi_{e^\theta\nu} = \psi_\nu + \theta$.*

Lemme 2.2. *Soient ν et ν' des mesures de Radon sur E. S'il existe une partie compacte M de E et un réel $\omega \geq 0$ tels que, pour tout borélien B de E, $\nu'(B) \leq \omega\nu(B + M)$, alors $\psi_{\nu'} \leq \psi_\nu$.*

Si Γ est un sous-groupe fermé de G, soit ν_Γ l'image par μ d'une mesure de Haar de Γ ; on note ψ_Γ la fonction $\frac{1}{\log q}\psi_{\nu_\Gamma}$. Soit ρ la forme linéaire sur E qui est la somme des racines positives multipliées par la dimension de leurs espaces poids. De la formule d'intégration pour la décomposition de Cartan [4, I.5.2], on déduit tout de suite :

Lemme 2.3. *On a $\psi_G = \rho$.*

Le résultat principal de [7] s'énonce :

Théorème 2.4. *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G. La fonction ψ_Γ est majorée par ρ. Elle est concave, semi-continue supérieurement et positive partout où elle est $> -\infty$.*

3 Disparition des K-orbites

On fixe des mesures de Haar $\mathrm{d}g$ sur G et $\mathrm{d}k$ sur K. On suppose que $\int_K \mathrm{d}k = 1$.

Rappelons une propriété usuelle des mesures de Haar :

Lemme 3.1. *Soient H un groupe topologique localement compact unimodulaire et K un sous-groupe fermé unimodulaire de H. Alors $K\backslash H$ possède une unique mesure de Radon H-invariante non triviale, à multiplication par un réel > 0 près. Munissons H et K de mesures de Haar à droite $\mathrm{d}h$ et $\mathrm{d}k$. La mesure H-invariante m de $K\backslash H$ peut-être normalisée de façon à ce que, si ψ est une fonction mesurable sur H, ψ soit intégrable si et seulement si la fonction $\hat{\psi} : Kh \mapsto \int_K \psi(kh)\mathrm{d}k$ est définie presque partout et intégrable sur $K\backslash H$ et que, alors, on ait :*

$$\int_{K\backslash H} \hat{\psi}\mathrm{d}m = \int_H \psi(h)\mathrm{d}h.$$

Soit Γ un sous-groupe discret de G. On note m la mesure G-invariante sur $\Gamma\backslash G$ associée à la mesure de Haar de G et à la mesure de comptage sur Γ. On suppose que Γ n'est pas un réseau de G, c'est-à-dire que $m(\Gamma\backslash G) = \infty$. On note p_0 l'image de e dans $\Gamma\backslash G$.

Dans cette section, nous allons prouver :

Proposition 3.2. *Soit* $\varphi : \Gamma\backslash G \to \mathbb{C}$*, une fonction continue à support compact. Il existe un réel* $c > 0$ *tel que, pour tout* g *dans* G*, on ait :*

$$\left|\int_K \varphi(p_0kg)\mathrm{d}k\right| \leq c\xi(\mu(g)).$$

Nous commencerons par nous ramener au cas où φ est K-invariante, grâce à un raisonnement simple de topologie :

Lemme 3.3. *Soit* X *un espace topologique localement compact et* K *un groupe compact agissant continûment sur* X*. Si* φ *est une fonction continue à support compact sur* X*, il existe une fonction continue* K*-invariante, positive et à support compact* ψ *telle que* $|\varphi| \leq \psi$*.*

Nous pouvons d'ores et déjà conclure, dans le cas où $\mathbb{K}$ est non-archimédien :

Démonstration de la proposition 3.2 quand $\mathbb{K}$ *est non-archimédien.* D'après le lemme 3.3, on peut supposer que φ est K-invariante. Par ailleurs comme K est un sous-groupe ouvert de G, la mesure de Haar de K est la restriction de la mesure de Haar de G, et, d'après le lemme 3.1, pour tout g dans G, on a :

$$\int_K \varphi(p_0kg)\mathrm{d}k = \mathrm{card}(\Gamma \cap K) \int_{p_0K} \varphi(pg)\mathrm{d}m(p).$$

Or, comme Γ n'est pas un réseau de G, la représentation naturelle de G dans $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash G)$ ne possède pas de vecteurs G-invariants ; le résultat est alors une conséquence du théorème 1.2.□

Intéressons-nous à présent au cas où $\mathbb{K}$ est archimédien. Nous utiliserons une décomposition de la mesure de Haar de G :

Lemme 3.4. *Il existe une base de voisinages de* e *dans* G *constituée de voisinages* V *pour lesquels il existe une mesure de Radon* τ *sur* V *telle que, pour toute fonction* φ *continue à support compact dans* KV*, on ait :*

$$\int_{KV} \varphi(g)\mathrm{d}g = \int_{K\times V} \varphi(kv)\mathrm{d}k\mathrm{d}\tau(v).$$

Démonstration. C'est une conséquences de la formule d'intégration pour les décompositions d'Iwasawa de G (*cf.* [4, I.5.1]). □

Enfin, nous utiliserons un cas particulier du théorème du front d'onde, de A. Eskin et C. McMullen :

Lemme 3.5 (Eskin, McMullen, [3]). *Pour tout voisinage* U *de* e *dans* G*, il existe un voisinage* V *de* e *tel que, pour tout* g *dans* G*,* $KVg \subset KgU$*.*

Démonstration. Remarquons que, par décomposition de Cartan, quitte à remplacer par la suite V par un voisinage plus petit normalisé par K, il suffit de démontrer ce résultat pour des g dans Z^+K.

Soient $\mathbf{P}$ le $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique minimal de $\mathbf{G}$ associé au choix de $\mathbf{A}$ et de E^+ et P le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. Le groupe P possède une base de voisinages de l'élément neutre stables par l'action adjointe des éléments de $(Z^+)^{-1}$. Or, on a la décomposition d'Iwasawa $G = KP$. Soient alors U un voisinage de e dans G normalisé par K et $V \subset U$ un voisinage de e dans P tel que, pour tout z dans Z^+, $z^{-1}Vz \subset V$. L'ensemble KV est un voisinage de e dans G et, pour z dans Z^+ et k dans K, on a :

$$KVzk = Kz(z^{-1}Vz)k \subset KzVk \subset KzUk = K(zk)U,$$

ce qu'il fallait démontrer.□

Nous pouvons à présent démontrer notre proposition :

Démonstration de la proposition 3.2 quand $\mathbb{K}$ *est* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. Soit U un voisinage compact de e dans G. D'après le lemme 3.3, appliqué à la fonction $p \mapsto \sup_{u \in U} |\varphi(pu^{-1})|$, il existe une fonction ψ K-invariante, positive, continue et à support compact sur $\Gamma \backslash G$ telle que, pour p dans $\Gamma \backslash G$ et u dans U, on ait $|\varphi(p)| \leq \psi(pu)$.

Soit alors, comme dans le lemme 3.5, un voisinage V borné de e dans G tel que, pour g dans G, $KVg \subset KgU$. On suppose que V vérifie la propriété du lemme 3.4 et on choisit une mesure τ sur V comme dans cet énoncé. Enfin, soit W un voisinage borné de e tel que $V \subset W$ et que W soit normalisé par K. Comme Γ n'est pas un réseau de G, la représentation naturelle de G dans $\mathrm{L}^2(\Gamma \backslash G)$ ne possède pas de vecteurs G-invariants et, donc, le théorème 1.2 s'applique aux vecteurs K-invariants que sont la fonction ψ et la fonction caractéristique de p_0KW. En d'autres termes, il existe $c > 0$ tel que, pour tout g dans G,

$$\int_{p_0KV} \psi(pg)\mathrm{d}m(p) \leq \int_{p_0KW} \psi(pg)\mathrm{d}m(p) \leq c\xi(\mu(g)).$$

Soit g dans G. D'une part, on a, d'après le lemme 3.1 :

$$\begin{aligned}\int_{KV} \psi(p_0hg)\mathrm{d}h &= \int_{p_0KV} \mathrm{card}(p \cap KV)\psi(pg)\mathrm{d}m(p)\\ &\leq \mathrm{card}(\Gamma \cap KVV^{-1}K) \int_{p_0KV} \psi(pg)\mathrm{d}m(p)\end{aligned}$$

(où l'on a employé le même symbole pour un point de $\Gamma \backslash G$ et pour la classe à droite associée).

D'autre part, pour v dans V, il existe u dans U tel que $Kvg = Kgu$; par conséquent, on a :

$$\int_K \psi(p_0kvg)\mathrm{d}k \geq \int_K \psi(p_0kgu)\mathrm{d}k \geq \int_K |\varphi(p_0kg)|\,\mathrm{d}k$$

et, donc,

$$\int_{KV} \psi(p_0 g)\mathrm{d}g = \int_V \left(\int_K \psi(p_0 kvg)\mathrm{d}k \right) \mathrm{d}\tau(v) \geq \tau(V) \int_K |\varphi(p_0 kg)|\, \mathrm{d}k.$$

Il vient :

$$\int_K |\varphi(p_0 kg)|\, \mathrm{d}k \leq \frac{c\,\mathrm{card}(\Gamma \cap KVV^{-1}K)}{\tau(V)} \xi(\mu(g)),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

4 Majoration des exposants de convergence

Dans cette section, nous utilisons la majoration précédente pour démontrer :

Théorème 4.1. *Soit Γ un sous-groupe discret de G. Si Γ n'est par un réseau de G, on a $\psi_\Gamma \leq \rho - \theta$.*

Établissons un résultat préliminaire. Pour tout borélien B de G/K, notons χ_B la fonction indicatrice de l'ensemble $B^{-1} \subset K\backslash G$ et F_B la fonction sur $\Gamma\backslash G$ telle que, pour tout g dans G, $F_B(\Gamma g) = \mathrm{card}(\Gamma \cap gB)$. Munissons $K\backslash G$ de sa mesure G-invariante n associée au choix des mesures de Haar de G et de K. On a :

Lemme 4.2. *Soit φ une fonction continue à support compact dans $\Gamma\backslash G$. Il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout borélien B de mesure finie dans G/K, on ait :*

$$\left| \int_{\Gamma\backslash G} \varphi F_B \mathrm{d}m \right| \leq c \int_{B^{-1}} (\xi \circ \mu) \mathrm{d}n.$$

Démonstration. Soit B un borélien de mesure finie dans G/K. La fonction $g \mapsto \chi_B(Kg)$ est intégrable sur G. Or, pour g dans G, on a :

$$F_B(\Gamma g) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_B(\gamma g).$$

D'après le lemme 3.1, la fonction F_B est intégrable sur $\Gamma\backslash G$ et son intégrale est égale à $n(B^{-1})$. De même, en appliquant le lemme 3.1 à $\Gamma\backslash G$ et à $K\backslash G$, pour toute fonction continue φ à support compact dans $\Gamma\backslash G$, on a :

$$\int_{\Gamma\backslash G} \varphi F_B \mathrm{d}m = \int_G \varphi(\Gamma g)\chi_B(Kg)\mathrm{d}g = \int_{B^{-1}} \psi \mathrm{d}n,$$

où, pour g dans G, on a $\psi(Kg) = \int_K \varphi(\Gamma kg)\mathrm{d}k$.

Or, d'après la proposition 3.2, si φ est une fonction continue à support compact dans $\Gamma\backslash G$, il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout g dans G, on ait $|\int_K \varphi(\Gamma kg)\mathrm{d}k| \leq c\xi(\mu(g))$. Il vient bien, pour tout borélien B de mesure finie dans G/K,

$$\left| \int_{\Gamma\backslash G} \varphi F_B \mathrm{d}m \right| \leq c \int_{B^{-1}} (\xi \circ \mu) \mathrm{d}n.$$

□

Terminons à présent :

Démonstration du théorème 4.1. Soit V un voisinage compact de e dans G. D'après le proposition 1.1, il existe une partie compacte M de E telle que, pour tout g dans G, $\mu(V^{-1}g) \subset \mu(g) + M$. Alors, pour g dans V, on a, pour tout borélien B de E, $(\Gamma \cap \mu^{-1}(B)) \subset (\Gamma \cap g\mu^{-1}(B + M))$ et, donc, $F_{\mu^{-1}(B+M)}(\Gamma g) \geq \mathrm{card}(\Gamma \cap \mu^{-1}(B))$.

Donnons-nous une fonction φ positive, continue, à support compact dans $p_0 V$, avec $\int_{\Gamma\backslash G} \varphi \mathrm{d}m = 1$. Soit $c > 0$, comme dans le lemme 4.2. On a, pour tout borélien B de E,

$$\mathrm{card}(\Gamma \cap \mu^{-1}(B)) \leq \int_{\Gamma\backslash G} \varphi F_{\mu^{-1}(B+M)} \mathrm{d}m \leq c \int_{(\mu^{-1}(B+M))^{-1}} (\xi \circ \mu) \mathrm{d}n.$$

Or $(\mu^{-1}(B + M))^{-1} = \mu^{-1}(\iota(B + M))$ et, donc, en notant ν_G l'image par μ de la mesure de Haar de G,

$$\int_{(\mu^{-1}(B+M))^{-1}} (\xi \circ \mu) \mathrm{d}n = \int_{\iota(B+M)} \xi \mathrm{d}\nu_G = \int_{B+M} \xi \mathrm{d}\nu_G,$$

d'où le résultat, par définition de θ et d'après les lemmes 2.2 et 2.3. □

Références

[1] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, *Annals of mathematics* **144** (1996), 315-347.

[2] K. Corlette, Hausdorff dimension of limit sets I, *Inventiones mathematicæ* **102** (1990), 521-542.

[3] A. Eskin, C. McMullen, Mixing, counting and equidistribution in Lie groups, *Duke mathematical journal* **71** (1993), 181-209.

[4] S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure and Applied Mathematics 113, Academic Press, San Diego, 1984.

[5] E. Leuzinger, Kazhdan property (T), L^2-spectrum and isoperimetric inequalities for locally symmetric spaces, *Commentarii Mathematici Helvetici* **78** (2003), 116-133.

[6] H. Oh, Uniform pointwise bounds for matrix coefficients of unitary representations and applications to Kazhdan constants, *Duke mathematical journal* **113** (2002), 133-192.

[7] J.-F. Quint, Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur, *Commentarii Mathematici Helvetici* **77** (2002), 563-608.

Jean-François Quint
Institut Girard Desargues
Université Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex
France
quint@igd.univ-lyon1.fr