Travaux mathématiques, Volume 16 (2005), 299–314,

Algèbres quasi-Gerstenhaber différentielles

par Momo Bangoura

Abstract

We prove that a differential quasi-Batalin-Vilkovisky algebra is a differential quasi-Gerstenhaber algebra, and that, if A is a vector bundle, there is a 1-to-1 correspondence between quasi-Lie bialgebroid structures on (A, A^*) and differential quasi-Gerstenhaber algebra structures on $\Gamma(\bigwedge A)$, and quasi-differential Gerstenhaber algebra structures on $\Gamma(\bigwedge A^*)$. We define the twisting of unimodular differential quasi-Batalin-Vilkovisky algebra structures on $\Gamma(\bigwedge A)$, and we prove that this operation commutes with the above 1-to-1 correspondences.

Résumé: On montre que toute algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle est une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle, et que, si A est un fibré vectoriel, les structures de bigébroïde de quasi-Lie sur (A, A^*) sont en correspondance bijective avec les structures d'algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle sur $\Gamma(\bigwedge A)$, et avec les structures d'algèbre de Gerstenhaber quasi-différentielle sur $\Gamma(\bigwedge A^*)$. Nous définissons le twisting pour les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Gamma(\bigwedge A)$, puis nous montrons que cette opération commute avec les correspondances entre les différentes structures

1 Introduction

Le but de ce travail est de présenter les algèbres quasi-Gerstenhaber différentielles comme exemples de L_∞-algèbres [11], et d'établir les relations avec d'autres structures telles que les algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles [5, 2] et les bigébroïdes de quasi-Lie [15]. Une structure quasi-Gerstenhaber différentielle sur une algèbre associative commutative graduée $\mathbf{A}$ est la donnée d'une collection d'applications k-linéaires $\{l_k\}$ sur $\mathbf{A}$, vérifiant un ensemble de relations, chaque l_k étant de degré $2-k$, avec $l_k = 0$ pour $k \geq 4$; c'est une généralisation naturelle de la notion d'algèbre de Gerstenhaber différentielle [8, 17], cette dernière s'obtenant pour $l_3 = 0$.

Nous aurons à considérer la généralisation d'une bigèbre de Lie (F, F^*), appelée bigèbre de quasi-Lie (ou quasi-bigèbre co-jacobienne) et définie par un élement de $\bigwedge^3 F^*$, ainsi que l'objet dual, appelé quasi-bigèbre de Lie (ou quasi-bigèbre jacobienne) et défini par un élément de $\bigwedge^3 F$ [7]. Dans le premier cas, l'algèbre extérieure de F n'est qu'une algèbre quasi-Gerstenhaber, mais elle est munie d'une dérivation de carré nul (algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle), tandis que dans le cas dual, l'algèbre extérieure de F est une algèbre Gerstenhaber, mais elle est munie d'une dérivation qui n'est pas de carré nul (algèbre de Gerstenhaber quasi-différentielle).

Les généralisations correspondantes des algébroïdes de Lie peuvent être appelées respectivement bigébroïdes de quasi-Lie [15] et quasi-bigébroïdes de Lie, et les généralisations ci-dessus des structures d'algèbre de Gerstenhaber sont alors obtenues sur l'algèbre des sections de l'algèbre extérieure du fibré vectoriel considéré et de son dual.

Les résultats de cet article ont été annoncés dans une prépublication de l'École Polytechnique en 2002. On trouvera dans [6], dans le cadre de la théorie des algèbres quasi-Lie-Rinehart, une étude des algèbres quasi-Gerstenhaber bigraduées et des algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky à laplacien nul bigraduées, ainsi que des remarques comparatives.

La section 2 est consacrée à un rappel succinct sur les dérivations d'ordre supérieur [10, 1], dont nous établissons quelques propriétés essentielles.

Dans la section 3, nous rappelons la définition des algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles et nous en donnons des exemples, dont l'algèbre des formes différentielles sur une variété ϕ-Poisson, au sens de [16]. Nous montrons que toute algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle est aussi une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle. Ce résultat étend au cas "quasi" la construction [10] d'un crochet de Gerstenhaber sur une algèbre associative commutative graduée à partir d'une dérivation impaire d'ordre 2 et de carré nul.

Dans la section 4, nous montrons que pour un fibré vectoriel donné $A \to M$, il existe une correspondance bijective entre les structures de bigébroïde de quasi-Lie sur (A, A^*) et les structures d'algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle sur $\Gamma(\bigwedge A)$, l'algèbre des sections de $\bigwedge A$, d'une part, et les structures d'algèbre de Gerstenhaber quasi-différentielle sur $\Gamma(\bigwedge A^*)$, d'autre part. Comme conséquence, nous montrons que pour un espace vectoriel donné F de dimension finie, les structures de quasi-bigèbre de Lie sur F sont en correspondance bijective avec les structures d'algèbre de Gerstenhaber quasi-différentielle sur $\bigwedge F$ et avec les structures d'algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle sur $\bigwedge F^*$, l'algèbre extérieure du dual de F.

Dans la section 5, nous définissons une relation d'équivalence sur les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Gamma(\bigwedge A)$, que nous appelons le *twisting*, puis nous montrons que, si des structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Gamma(\bigwedge A)$ sont équivalentes par twisting, alors les structures d'algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle correspondantes le sont au sens de [15], ce qui montre la compatibilité des diverses notions considérées.

2 Dérivations d'ordre supérieur

Dans cette section, nous rappelons la définition des dérivations d'ordre supérieur sur une algèbre graduée, ainsi que certaines de leurs propriétés. Soit $\mathbf{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ une algèbre associative commutative graduée. On désignera le degré d'un élément $a \in \mathbf{A}$ par $|a|$.

Définition 2.1. Une application linéaire $\Delta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ est de *degré* $|\Delta|$ si $\Delta(A^i) \subset A^{i+|\Delta|}$ pour tout i. Si $|\Delta|$ est impair, on dira que l'opérateur Δ est impair.

Le degré d'un élément $a_1 \otimes ... \otimes a_n \in \bigotimes^n \mathbf{A}$ est $\sum_{k=1}^n |a_k|$.

À une application linéaire $\Delta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, associons les applications linéaires $\Gamma^n_\Delta : \bigotimes^n \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ définies par

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_\Delta(a) &= \Delta(a), \\
\Gamma^{n+1}_\Delta(a_1, ..., a_{n+1}) &= \Gamma^n_\Delta(a_1, .., a_n a_{n+1}) - (\Gamma^n_\Delta(a_1, ..., a_n))a_{n+1} \\
&\quad -(-1)^{|a_n|(|a_1|+...+|a_{n-1}|+|\Delta|)} a_n \Gamma^n_\Delta(a_1, ..., a_{n-1}, a_{n+1}),
\end{aligned}$$

pour $a, a_1, ..., a_{n+1} \in \mathbf{A}$. Suivant [10, 1] on a :

Définition 2.2. Une application linéaire $\Delta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ est une *dérivation d'ordre* n si $\Gamma^{n+1}_\Delta = 0$, une dérivation d'ordre 0 étant nulle.

Un endomorphisme Δ de $\mathbf{A}$ est une dérivation d'ordre 1 si c'est une *dérivation* dans le sens usuel.

Définition 2.3. Soit Δ un opérateur linéaire impair sur une algèbre associative commutative graduée $\mathbf{A}$. Pour tous $a, b \in \mathbf{A}$, on pose

$$[a, b]_\Delta = (-1)^{|a|}\Gamma^2_\Delta(a, b) = (-1)^{|a|}(\Delta(ab) - (\Delta a)b - (-1)^{|a|}a(\Delta b)) \ ,$$

et l'on dit que Δ *engendre* le crochet $[\ ,\ ]_\Delta$

On sait [10] que si Δ est une dérivation d'ordre 2, de degré -1, et de carré nul, alors $[\ ,\ ]_\Delta$ définit sur $\mathbf{A}$ une structure d'algèbre de Gerstenhaber, en particulier une structure d'algèbre de Lie graduée sur la suspension $\mathbf{A}[1]$ de $\mathbf{A}$, définie par $\mathbf{A}[1] = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^{(i)}$, où $A^{(i)} = A^{i+1}$.

Dans tout ce qui va suivre, $[\ ,\ ]$ désignera le commutateur gradué sur l'espace vectoriel des endomorphismes gradués de $\mathbf{A}$, et son extension aux cochaînes de Hochschild sur $\mathbf{A}$.

Définition 2.4. Soient $d : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ et $D : \bigotimes^n \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ des opérateurs linéaires ; le commutateur $[d, D]$ est l'opérateur linéaire de $\bigotimes^n \mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}$ défini par

$$\begin{aligned}[d,D](a_1,a_2,...,a_n) &= d(D(a_1,a_2,...,a_n)) \\ &\quad -(-1)^{|d||D|}(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|d|(|a_1|+...+|a_{i-1}|)}D(a_1,...,da_i,...,a_n)).\end{aligned}$$

Cette expression généralise au cas gradué le crochet de Gerstenhaber des cochaînes de Hochschild sur $\mathbf{A}$. Rappelons qu'un endomorphisme Δ de $\mathbf{A}$ est une dérivation de $\mathbf{A}$ si et seulement si $[\Delta, m_a] - m_{\Delta a} = 0$, pour tout $a \in \mathbf{A}$, où m désigne la multiplication de $\mathbf{A}$ et m_a désigne la multiplication à gauche par a, $m_a(b) = m(a,b) = ab$, pour tout $b \in \mathbf{A}$.

On a le résultat suivant [1] :

Lemme 2.1. Pour une algèbre graduée $\mathbf{A}$ et un opérateur linéaire impair $\Delta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, le crochet $[\ ,\ ]_\Delta$ satisfait les propriétés suivantes :
a) l'identité quasi-Jacobi graduée, i.e., $\forall a,b,c \in \mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}&[[a,b]_\Delta,c]_\Delta - [a,[b,c]_\Delta]_\Delta - (-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}[b,[a,c]_\Delta]_\Delta \\ &= (-1)^{|b|}([\Delta,\Gamma^3_\Delta](a,b,c) - \Gamma^3_{\Delta^2}(a,b,c)),\end{aligned}$$

b) la règle de Leibniz modifiée, i.e., $\forall a,b,c \in \mathbf{A}$,

$$[a,bc]_\Delta - [a,b]_\Delta c - (-1)^{(|a|-1)|b|}b[a,c]_\Delta = (-1)^{|a|}\Gamma^3_\Delta(a,b,c).$$

Lemme 2.2. Si d est une dérivation de degré 1 sur $\mathbf{A}$, alors pour tout opérateur linéaire Δ sur $\mathbf{A}$, on a

$$\Gamma^n_{[d,\Delta]} = [d, \Gamma^n_\Delta],\ \forall n \geq 1.$$

Démonstration : Ce lemme se démontre par récurrence. En effet, pour $n = 1$, on a par définition,

$$\Gamma^1_{[d,\Delta]} = [d,\Delta] = [d,\Gamma^1_\Delta].$$

Le cas général s'obtient en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que d soit une dérivation. $\square$

Lemme 2.3. Soit d une dérivation de degré 1 sur $\mathbf{A}$ et Δ un opérateur linéaire impair sur $\mathbf{A}$. Pour $a, b \in \mathbf{A}$, on pose

$$C_a(b) = [a,b]_\Delta = (-1)^{|a|}([\Delta, m_a] - m_{\Delta a})(b).$$

L'opérateur

$$L = [d, \Delta],$$

vérifie

$$\forall a \in \mathbf{A},\ (-1)^{|a|}([d, C_a] - C_{da}) = [L, m_a] - m_{La}.$$

Démonstration : En utilisant l'identité de Jacobi graduée du commutateur, on obtient $\forall a \in \mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}(-1)^{|a|}([d, C_a] - C_{da}) &= [d, [\Delta, m_a]] - [d, m_{\Delta a}] + [\Delta, m_{da}] - m_{\Delta da} \\ &= [[d, \Delta], m_a] - [\Delta, [d, m_a]] - [d, m_{\Delta a}] + [\Delta, m_{da}] - m_{\Delta da}.\end{aligned}$$

Mais par hypothèse, d est une dérivation de $(\mathbf{A}, m)$, i.e., $\forall b \in \mathbf{A},\ [d, m_b] - m_{db} = 0$, par conséquent

$$(-1)^{|a|}([d, C_a] - C_{da}) = [L, m_a] - m_{La}.\square$$

Le lemme implique aussitôt

Proposition 2.1. d est une dérivation de $(\mathbf{A}, [\ ,\ ]_\Delta)$ si et seulement si L est une dérivation de $(\mathbf{A}, m)$.

3 Algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles et algèbres quasi-Gerstenhaber différentielles.

Les algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles sont des généralisations naturelles, introduites par Getzler [5], en vue d'applications à la théorie conforme des champs topologique, des algèbres de Batalin-Vilkovisky [4, 1, 8, 17].

Définition 3.1. Une *algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle* est un quadruplet
$(\mathbf{A}, \Delta, \delta, \Phi)$, où $\mathbf{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ est une algèbre associative commutative graduée, munie d'une dérivation Δ d'ordre 2 et de degré -1, d'une dérivation δ de degré 1 et d'une dérivation Φ d'ordre 3 et de degré -3, tels que
(3.1) $\delta^2 = 0$;
(3.2) $L = [\delta, \Delta]$ est une dérivation d'ordre 1 ;
(3.3) $\Delta^2 + [\delta, \Phi] = 0$;
(3.4) $[\Delta, \Phi] = 0$ et $\Phi^2 = 0$.

Dans le cas où $\Phi = 0$, le triplet $(\mathbf{A}, \Delta, \delta)$ satisfaisant les conditions (3.1)-(3.3) est une *algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle* ; le couple $(\mathbf{A}, \Delta)$ satisfaisant la condition $\Delta^2 = 0$ est une *algèbre de Batalin-Vilkovisky.*

Exemple 3.1 : Soit (F, μ) une algèbre de Lie de dimension finie et $\mathbf{r} \in \bigwedge^2 F$; soit $d_\mu : \bigwedge F^* \to \bigwedge F^*$ l'opérateur de Chevalley-Eilenberg sur les cochaînes sur F à coefficients triviaux associé à μ et $[\ ,\ ]^\mu$ le crochet de Schouten algébrique [10, 7], étendant μ sur $\bigwedge F$. Posons $\Delta_\mathbf{r} = [d_\mu, i_\mathbf{r}]$ et $\Phi_\mathbf{r} = -\frac{1}{2} i_{[\mathbf{r},\mathbf{r}]^\mu}$. Alors $(\bigwedge F^*, \Delta_\mathbf{r}, d_\mu, \Phi_\mathbf{r})$ est une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle [2], et en particulier, si $\mathbf{r}$ est solution de l'équation de Yang-Baxter classique, $[\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu = 0$, alors $(\bigwedge F^*, \Delta_\mathbf{r}, d_\mu)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle.

Exemple 3.2 : Soit M une variété différentiable et soit P un champ de bivecteurs sur M. Soit d la différentielle de de Rham sur les formes différentielles sur M et $[\ ,\ ]_S$ le crochet de Schouten des champs de multivecteurs sur M [10]. Posons $\Omega(M) = \Gamma(\bigwedge T^*M)$, $\partial_P = [d, i_P]$ et $\Phi_P = -\frac{1}{2} i_{[P,P]_S}$. Alors $(\Omega(M), \partial_P, d, \Phi_P)$ est une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle. En particulier, si (M, P, ϕ) est une *variété ϕ-Poisson* [16, 14, 15], i.e., P est un champ de bivecteurs sur M et ϕ une 3-forme fermée sur M tels que

$$\frac{1}{2}[P,P]_S = (\wedge^3 \tilde{P})\phi,$$

où $\tilde{P} : T^*M \to TM$ est défini par $(\tilde{P}(\alpha))(\beta) = P(\alpha, \beta)$, pour $\alpha, \beta \in T^*M$, alors $(\Omega(M), \partial_P, d, -i_{(\wedge^3 \tilde{P})\phi})$ est une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle.

Exemple 3.3 : Soit $(F, \mu, \gamma, \varphi)$, $\varphi \in \bigwedge^3 F$, une structure de quasi-bigèbre de Lie sur un espace vectoriel F de dimension finie [3, 7], muni d'un élément x_0 tel que $\partial_\mu \varphi = \gamma(x_0)$, où ∂_μ est l'opérateur transposé de d_μ ; un tel élément est appelé un co-caractère généralisé [2]. Soit ∂_γ l'analogue de ∂_μ, associé à γ. Posons $\Delta_{\gamma,x_0} = \partial_\gamma + i_{x_0}$. Alors $(\bigwedge F^*, \Delta_{\gamma,x_0}, d_\mu, i_\varphi)$ est une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle [2].

Plus généralement, on montre dans [2] le résultat suivant :

Théorème 3.1. Les structures de quasi-bigèbre de Lie sur un espace vectoriel F de dimension finie, muni d'un co-caractère généralisé, sont en correspondance bijective avec les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\bigwedge F^*$.

Pour une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle donnée $(\mathbf{A}, \Delta, \delta, \Phi)$, l'opérateur $L = [\delta, \Delta]$ est appelé le *laplacien* de l'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle. Si $L = 0$, l'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle $(\mathbf{A}, \Delta, \delta, \Phi)$ est dite *unimodulaire*. On montre dans [2] que L commute avec les opérateurs Δ, δ et Φ, donc Ker$L$ est muni d'une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle induite par celle de $\mathbf{A}$, et l'opérateur Δ induit sur la cohomologie, $H(\mathrm{Ker}L, \delta)$, de Ker$L$, une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky.

Définition 3.2. Une *algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle* est un quadruplet $(\mathbf{A}, d, [\ ,\ ]_\mathbf{A}, \Psi)$, où $\mathbf{A} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$, est une algèbre associative commutative graduée, munie d'une dérivation $d : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ de degré 1, d'une application bilinéaire antisymétrique $[\ ,\ ]_\mathbf{A} : \bigotimes^2 \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ de degré 0, et d'une application trilinéaire antisymétrique $\Psi : \bigotimes^3 \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ de degré -1, telles que
(3.5) $d^2 = 0$;
(3.6) d est une dérivation de $(\mathbf{A}, [\ ,\ ]_\mathbf{A})$, i.e.,

$$d([a,b]_\mathbf{A}) = [da, b]_\mathbf{A} + (-1)^{|a|-1}[a, db]_\mathbf{A}, \forall a, b \in \mathbf{A} \ ;$$

(3.7) $[\ ,\ ]_{\mathbf{A}}$ vérifie l'identité quasi-Jacobi graduée, i.e.,

$$[[a,b]_A,c]_{\mathbf{A}}-[a,[b,c]_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}}-(-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}[b,[a,c]_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}}=[d,\Psi](a,b,c),\forall a,b,c\in\mathbf{A}\ ;$$

(3.8) $[\ ,\ ]_{\mathbf{A}}$ vérifie la règle de Leibniz, i.e.,

$$[a,bc]_{\mathbf{A}}=[a,b]_{\mathbf{A}}c+(-1)^{(|a|-1)|b|}b[a,c]_{\mathbf{A}},\forall a,b,c\in\mathbf{A}\ ;$$

(3.9) $[\ ,\ ]_{\mathbf{A}}$ et Ψ satisfont la relation,

$$\sum_{\sigma} sgn(\sigma)\varepsilon(\sigma)[\Psi(a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},a_{\sigma(3)}),a_{\sigma(4)}]_{\mathbf{A}}=\sum_{\tau} sgn(\tau)\varepsilon(\tau)\Psi([a_{\tau(1)},a_{\tau(2)}]_{\mathbf{A}},a_{\tau(3)},a_{\tau(4)}),$$

où σ et τ sont toutes les permutations de $\{1,2,3,4\}$ telles que $\sigma(1)<\sigma(2)<\sigma(3)$ et $\tau(1)<\tau(2)$, $\tau(3)<\tau(4)$, $sgn(\sigma)$ est la signature de la permutation σ et $\varepsilon(\sigma)$ est le signe de Koszul défini par

$$a_1a_2a_3a_4=\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)},$$

$\forall a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbf{A}$.

Remarque 3.1 : Si $\Psi=0$, alors le triplet $(\mathbf{A},d,[\ ,\ ]_{\mathbf{A}})$ est une *algèbre de Gerstenhaber différentielle* [8, 1, 17].

Remarque 3.2 : Explicitement, la condition (3.9) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
&[\Psi(x,y,z),w]_{\mathbf{A}}+(-1)^{|y|(|z|+|w|)}[\Psi(x,z,w),y]_{\mathbf{A}}\\
&-(-1)^{|z||w|}[\Psi(x,y,w),z]_{\mathbf{A}}-(-1)^{|x|(|y|+|z|+|w|)}[\Psi(y,z,w),x]_{\mathbf{A}}\\
&=\Psi([x,y]_{\mathbf{A}},z,w)-(-1)^{|y||z|}\Psi([x,z]_{\mathbf{A}},y,w)\\
&+(-1)^{|w|(|y|+|z|)}\Psi([x,w]_{\mathbf{A}},y,z)+(-1)^{|x|(|y|+|z|)}\Psi([y,z]_{\mathbf{A}},x,w)\\
&-(-1)^{|x|(|y|+|w|)+|z||w|}\Psi([y,w]_{\mathbf{A}},x,z)+(-1)^{(|x|+|y|)(|z|+|w|)}\Psi([z,w]_{\mathbf{A}},x,y),
\end{aligned}$$

$\forall x,y,z,w\in\mathbf{A}$.

Ainsi, une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle est une L_∞-algèbre $(\mathbf{A},\{l_k\})$ où $l_k:\bigotimes^k\mathbf{A}\to\mathbf{A}$, telle que $|l_k|=2-k$ avec $l_1=d$, $l_2=[\ ,\ ]_{\mathbf{A}}$, $l_3=\Psi$ et $l_k=0$ pour $k\geq 4$.

Exemple 3.4 : Soit (F,μ,γ,φ) une quasi-bigèbre de Lie de dimension finie. Soit Ψ_φ l'application trilinéaire sur $\bigwedge F^*$ définie par

$$\Psi_\varphi(\xi,\eta,\zeta)=(-1)^{|\eta|}\Gamma^3_{i_\varphi}(\xi,\eta,\zeta),$$

pour $\xi,\eta,\zeta\in\bigwedge F^*$. Alors $(\bigwedge F^*,d_\mu,[\ ,\ ]_{\partial_\gamma},\Psi_\varphi)$ est une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle.

Exemple 3.5 : Soit, comme dans l'Exemple 3.2, (M, P, ϕ) une variété ϕ-Poisson. On sait que le crochet des formes sur M, $[\ ,\ ]_P$, est engendré par $\partial_P = [d, i_P]$ [10, 8]. Soit $\Psi_{P,\phi}$ l'application trilinéaire sur $\Omega(M)$ définie par

$$\Psi_{P,\phi}(\alpha, \beta, \lambda) = (-1)^{|\beta|+1}\Gamma^3_{i_{(\wedge^3\tilde{P})\phi}}(\alpha, \beta, \lambda).$$

Alors $(\Omega(M), d, [\ ,\ ]_P, \Psi_{P,\phi})$ est une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle.

Le résultat suivant généralise le lien entre les algèbres de Batalin-Vilkovisky et les algèbres de Gerstenhaber [8]

Théorème 3.2. Toute algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle est une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle.

Démonstration : Soit $(\mathbf{A}, \Delta, \delta, \Phi)$ une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle. Posons

$$d = \delta,$$
$$[x, y]_{\mathbf{A}} = [x, y]_\Delta = (-1)^{|x|}(\Delta(xy) - (\Delta x)y - (-1)^{|x|}x(\Delta y)), \forall x, y \in \mathbf{A},$$
$$\Psi(x, y, z) = (-1)^{|y|}\Gamma^3_\Phi(x, y, z), \forall x, y, z \in \mathbf{A}.$$

L'opérateur d est une dérivation de degré 1 de $\mathbf{A}[1]$, $[\ ,\ ]_{\mathbf{A}}$ est une application bilinéaire de degré 0 sur $\mathbf{A}[1]$ et Ψ est une application trilinéaire de degré-1 sur $\mathbf{A}[1]$. Remarquons que les applications $[\ ,\ ]_{\mathbf{A}}$ et Ψ sont antisymétriques sur $\mathbf{A}[1]$. En effet on a

$$[x, y]_{\mathbf{A}} = -(-1)^{(|x|-1)(|y|-1)}[y, x]_{\mathbf{A}}, \forall x, y \in \mathrm{A}\ ;$$

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, z) &= -(-1)^{(|x|-1)(|y|-1)}\Psi(y, x, z) \\ &= -(-1)^{(|y|-1)(|z|-1)}\Psi(x, z, y), \forall x, y, z \in \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Montrons à présent que le quadruplet $(\mathbf{A}[1], d, [\ ,\ ]_{\mathbf{A}}, \Psi)$ est une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle. En effet, la condition (3.5) est évidente. La condition (3.6) est une conséquence de la proposition 2.1, compte tenu de (3.2). Comme Δ est d'ordre 2, on a $\Gamma^n_\Delta = 0$, $\forall n \geq 3$, en particulier $\Gamma^3_\Delta = 0$ et dans ces conditions, (3.8) suit par le lemme 2.1. D'après le lemme 2.1, comme $\Gamma^3_\Delta = 0$, on a, $\forall x, y, z \in \mathbf{A}$,

$$[[x, y]_{\mathbf{A}}, z]_{\mathbf{A}} - [x, [y, z]_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}} - (-1)^{(|x|-1)(|y|-1)}[y, [x, z]_{\mathbf{A}}]_{\mathbf{A}}$$

$$=(-1)^{|y|+1}\Gamma^3_{\Delta^2}(x, y, z)$$

$$=(-1)^{|y|}\Gamma^3_{[d,\Phi]}(x, y, z) \qquad \text{car} \quad \Delta^2 = -[d, \Phi] \qquad \text{d'après} \quad (3.3)$$

$$=(-1)^{|y|}[d,\Gamma^3_\Phi](x,y,z) \qquad \text{d'après le lemme } 2.2$$

$$=[d,\Psi](x,y,z) \qquad \text{par définition.}$$

Ce qui nous donne la condition (3.7). Un calcul plus laborieux montre que la condition (3.9) suit de la condition $[\Delta,\Phi]=0$, sachant que Δ est d'ordre 2 et Φ d'ordre 3.
En définitive, $(\mathbf{A}[1], d, [\ ,\ ]_{\mathbf{A}}, \Psi)$ est une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle.
□

Remarques 3.3 : Sous les hypothèses du théorème 3.2, on a les équivalences suivantes :
1. Δ étant d'ordre 2, l'identité quasi-Jacobi graduée dans le lemme 2.1 est équivalente à la condition $\frac{1}{2}[\Gamma^2_\Delta,\Gamma^2_\Delta]=\Gamma^3_{\Delta^2}$; d'où l'équivalence de la condition (3.7) avec $\frac{1}{2}[\Gamma^2_\Delta,\Gamma^2_\Delta]=-[d,\Gamma^3_\Phi]$ en vertu de (3.3) et du lemme 2.2.
2. La condition (3.9) est équivalente à $[\Gamma^2_\Delta,\Gamma^3_\Phi]=0$.

4 Bigébroïdes de quasi-Lie et algèbres quasi-Gerstenhaber différentielles.

Rappelons tout d'abord la définition suivante [12] :

Définition 4.1. Un *algébroïde de Lie* est un fibré vectoriel $A\to M$ muni d'un crochet d'algèbre de Lie $[\ ,\ ]_A$ sur l'espace des sections $\Gamma(A)$ et d'un morphisme de fibrés vectoriels, $a: A\to TM$, appelé ancre, satisfaisant les conditions suivantes :
(4.1) $\forall X,Y\in\Gamma(A),\ a([X,Y])_A=[a(X),a(Y)]$;
(4.2) $\forall X,Y\in\Gamma(A),\ f\in C^\infty(M),\ [X,fY]_A=f[X,Y]_A+(a(X)f)Y.$

Remarque 4.1 : Lorsque la variété de base M est réduite à un point, alors l'algébroïde de Lie est une algèbre de Lie. Ainsi les algébroïdes de Lie sont des généralisations naturelles des algèbres de Lie, mais aussi du fibré tangent d'une variété différentiable M, l'ancre étant alors l'identité de TM.

Pour tout algébroïde de Lie, l'algèbre $\Gamma(\bigwedge A)$ des sections de $\bigwedge A$ est munie d'un crochet de Lie gradué, le crochet de Schouten généralisé [9, 13], défini comme l'unique extension du crochet d'algébroïde de Lie satisfaisant les conditions suivantes
- $[X,Y]_A=-(-1)^{(p-1)(q-1)}[Y,X]_A$, pour $X\in\Gamma(\bigwedge^p A), Y\in\Gamma(\bigwedge^q A)$,
- $[X,f]_A=a(X)f$ pour $X\in\Gamma(A), f\in C^\infty(M)$,
- $\forall X\in\Gamma(\bigwedge^p A)$, $[X,.]_A$ est une dérivation de degré $p-1$ du produit extérieur sur $\Gamma(\bigwedge A)$.

On vérifie que ce crochet vérifie l'identité de Jacobi graduée, ce qui munit $\Gamma(\bigwedge A)$ d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber [8]. D'autre part, l'algèbre $\Gamma(\bigwedge A^*)$ est munie d'une différentielle d_A définie par une formule analogue à celle de la différentielle de de Rham:

$$\begin{aligned}(d_A\omega)(X_0, ..., X_p) &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i a(X_i)(\omega(X_0, ..., \hat{X}_i, ..., X_p)) \\ &\quad + \sum_{0\leq i<j\leq p}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j]_A, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_p),\end{aligned}$$

où $\omega \in \Gamma(\bigwedge^p A^*)$, et satisfaisant $d_A^2 = 0$. Ainsi $\Gamma(\bigwedge A^*)$ est munie d'une structure d'algèbre différentielle commutative graduée. En fait, la structure d'algébroïde de Lie est complètement déterminée soit par d_A, soit par le crochet de Schouten généralisé. Suivant [14], on a

Définition 4.2. Soit $A \to M$ un fibré vectoriel. Une structure de *bigébroïde de quasi-Lie* sur (A, A^*) consiste en les données suivantes :
- une structure d'algébroïde de Lie sur A^*, d'ancre a_*,
- un morphisme de fibrés vectoriels $a : A \to TM$,
- une opération anti-symétrique $[\ ,\ ]_A$ sur $\Gamma(A)$,
- un élément $\phi \in \Gamma(\bigwedge^3 A^*)$,
satisfaisant les propriétés suivantes :
(4.3) $\forall X, Y \in \Gamma(A), f \in C^\infty(M)$,

$$[X, fY]_A = f[X, Y]_A + (a(X)f)Y \ ;$$

(4.4) $\forall X, Y \in \Gamma(A)$,

$$a([X, Y]_A) = [a(X), a(Y)] + a_*\phi(X, Y) \ ;$$

où $\phi(X, Y) = i_{X\wedge Y}\phi \in \Gamma(A^*)$;
(4.5) la différentielle d_{A^*} sur $\Gamma(\bigwedge A)$, venant de la structure d'algébroïde de Lie sur A^* est une dérivation de $(\Gamma(\bigwedge A), [\ ,\ ]_A)$, i.e., $\forall X, Y \in \Gamma(A)$,

$$d_{A^*}[X, Y]_A = [d_{A^*}X, Y]_A + [X, d_{A^*}Y]_A \ ;$$

(4.6) $\forall X, Y, Z \in \Gamma(A)$,

$$[[X, Y]_A, Z]_A + [[Y, Z]_A, X]_A + [[Z, X]_A, Y]_A = [d_{A^*}, i_\phi](X \wedge Y \wedge Z) \ ;$$

(4.7) $d_A\phi = 0$, où d_A est l'opérateur (qui n'est pas en général de carré nul) sur $\Gamma(\bigwedge A^*)$ venant de la structure $(a, [\ ,\ ]_A)$ sur A.

Remarque 4.2 : Si $\phi = 0$, alors la structure correspondante sur (A, A^*) est une structure de bigébroïde de Lie [13, 8]. Contrairement à la notion de bigébroïde de Lie, la notion de bigébroïde de quasi-Lie n'est pas auto-duale.

Remarque 4.3 : Lorsque la variété de base M est réduite à un point, $A = F$ est un espace vectoriel et $(A, A^*) = (F, F^*)$ est un bigébroïde de quasi-Lie si et seulement si F est une bigèbre de quasi-Lie (ou quasi-bigèbre co-jacobienne) [7].

Pour la suite, nous adoptons la définition suivante :

Définition 4.3. Soit $A \to M$ un fibré vectoriel. Une structure d'algèbre de Gerstenhaber quasi-différentielle sur $\Gamma(\bigwedge A)$ est un quadruplet $(\Gamma(\bigwedge A), d, [\ ,\ ]_A, \psi)$, où $(\Gamma(\bigwedge A), [\ ,\ ]_A)$ est une algèbre de Gerstenhaber munie d'une dérivation d de degré 1, et ψ un élément de $\Gamma(\bigwedge^3 A)$ tels que
(4.8) d est une dérivation de $(\Gamma(\bigwedge A), [\ ,\ ]_A)$;
(4.9) $d^2 + [\psi, .]_A = 0$;
(4.10) $d\psi = 0$.

Soit (A, A^*) un bigébroïde de quasi-Lie défini par les données suivantes : $[\ ,\ ]_A$, $[\ ,\ ]_{A^*}$, d_A, d_{A^*}, a, a_* et ϕ. Considérons les extensions des crochets $[\ ,\ ]_A$ et $[\ ,\ ]_{A^*}$ respectivement sur $\Gamma(\bigwedge A)$ et $\Gamma(\bigwedge A^*)$ et soit Ψ_ϕ l'extension de ϕ sur $\Gamma(\bigwedge A)$ définie par $\Gamma^3_{i_\phi}$. Alors on a le résultat suivant, dû à Roytenberg [15],

Théorème 4.1. Soit $A \to M$ un fibré vectoriel. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(4.11) (A, A^*) est un bigébroïde de quasi-Lie ;
(4.12) $(\Gamma(\bigwedge A), d_{A^*}, [\ ,\ ]_A, \Psi_\phi)$ est une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle ;
(4.13) $(\Gamma(\bigwedge A^*), d_A, [\ ,\ ]_{A^*}, \phi)$ est une algèbre de Gerstenhaber quasi-différentielle.

Démonstration :
(4.11) $\Rightarrow$ (4.12) Les conditions (4.6) et (4.7) d'une part, et la propriété de dérivation en chaque argument de $[\ ,\ ]_A$ et Ψ_ϕ d'autre part, prouvent que $(\Gamma(\bigwedge A), d_{A^*}, [\ ,\ ]_A, \Psi_\phi)$ est une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle.
(4.12) $\Rightarrow$ (4.11) Supposons que $(\Gamma(\bigwedge A), d_{A^*}, [\ ,\ ]_A, \Psi_\phi)$ est une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle ; alors d_{A^*} définit une structure d'algébroïde de Lie sur A^* avec une ancre $a_* : A^* \to TM$ et un crochet d'algèbre de Lie $[\ ,\ ]_{A^*}$ sur $\Gamma(A^*)$; l'identité quasi-Jacobi (3.7) du crochet $[\ ,\ ]_A$ dans la définition 3.2 entraîne les conditions (4.4) et (4.6), tandis que la condition (3.9) de la définition 3.2 pour des éléments de degré 1 entraîne la condition (4.7) ; les conditions (3.6) et (4.5) sont les mêmes. Par conséquent, (A, A^*) est un bigébroïde de quasi-Lie.
(4.12) $\Leftrightarrow$ (4.13) Cette équivalence s'obtient par dualité ; en effet si $(\Gamma(\bigwedge A), d_{A^*}, [\ ,\ ]_A, \Psi_\phi)$ est une algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle, l'opérateur d_{A^*} étant de carré nul, il définit un crochet d'algèbre de Lie graduée $[\ ,\ ]_{A^*}$ sur $\Gamma(\bigwedge A^*)$, munissant ainsi cette algèbre d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber ; $[\ ,\ ]_A$ définit un opérateur d_A sur $\Gamma(\bigwedge A^*)$ dont la condition (3.6) entraîne par symétrie qu'il est une dérivation du crochet d'algèbre de Lie $[\ ,\ ]_{A^*}$

[13, 8] ; la relation (3.7) entraîne la condition $d_A^2 + [\phi, .]_{A^*} = 0$. La condition (3.9) pour des éléments de degré 1 est équivalente à $d_A\phi = 0$. Par conséquent $(\Gamma(\bigwedge A^*), d_A, [\ ,\ ]_{A^*}, \phi)$ est une algèbre de Gerstenhaber quasi-différentielle. On obtient la réciproque en suivant la démarche inverse. □

Évidemment, on obtient comme cas particulier celui des bigèbres de quasi-Lie. On peut énoncer, en considérant le cas où $A = F^*$ est le dual d'un espace vectoriel de dimension finie F,

Corollaire 4.1. Soit F un espace vectoriel de dimension finie. Alors les structures de quasi-bigèbre de Lie sur F sont en correspondance bijective avec les structures d'algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle sur $\bigwedge F^*$, et avec les structures d'algèbre de Gerstenhaber quasi-différentielle sur $\bigwedge F$.

5 Twisting

Soit $A^* \to M$ un algébroïde de Lie ; alors, l'algèbre $\Gamma(\bigwedge A)$ est munie d'une différentielle d_{A^*} provenant de la structure d'algébroïde de Lie donnée sur A^*. Pour tout $\omega \in \Gamma(\bigwedge^2 A^*)$, nous obtenons une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire $(\Gamma(\bigwedge A), \Delta, d_{A^*}, \Phi)$ sur $\Gamma(\bigwedge A)$ en posant

$$\Delta = [d_{A^*}, i_\omega]$$

$$\Phi = -\frac{1}{2} i_{[\omega,\omega]_{A^*}}$$

où $[\ ,\ ]_{A^*}$ est le crochet de Schouten généralisé défini sur $\Gamma(\bigwedge A^*)$. Nous allons montrer à présent qu'à partir d'une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire donnée sur $\Gamma(\bigwedge A)$, on peut construire de nouvelles structures par le choix d'éléments de $\Gamma(\bigwedge^2 A^*)$. En effet, on a

Proposition 5.1. Soit $A^* \to M$ un algébroïde de Lie ; supposons qu'il existe Δ et Φ tels que $(\Gamma(\bigwedge A), \Delta, d_{A^*}, \Phi)$ soit une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire. Pour tout $\omega \in \Gamma(\bigwedge^2 A^*)$, posons

$$\Delta_\omega = \Delta + [d_{A^*}, i_\omega],$$

$$\Phi_\omega = \Phi + [\Delta, i_\omega] - \frac{1}{2} i_{[\omega,\omega]_{A^*}}.$$

Alors $(\Gamma(\bigwedge A), \Delta_\omega, d_{A^*}, \Phi_\omega)$ est encore une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire.

Démonstration : Par hypothèse, le laplacien $L = [d_{A^*}, \Delta]$ est nul. Il est clair que $L_\omega = [d_{A^*}, \Delta_\omega] = 0$.

Par ailleurs, en utilisant l'identité de Jacobi graduée pour le commutateur, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_\omega^2 &= \Delta^2 + [\Delta, [d_{A^*}, i_\omega]] + \frac{1}{2}[[d_{A^*}, i_\omega], [d_{A^*}, i_\omega]] \\
&= -[d_{A^*}, \Phi] - [d_{A^*}, [\Delta, i_\omega]] + [[d_{A^*}, \Delta], i_\omega] + \frac{1}{2}[d_{A^*}, [i_\omega, [d_{A^*}, i_\omega]]] \\
&= -[d_{A^*}, \Phi + [\Delta, i_\omega] - \frac{1}{2} i_{[\omega,\omega]_{A^*}}] = -[d_{A^*}, \Phi_\omega].
\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta_\omega^2 + [d_{A^*}, \Phi_\omega] = 0.$$

Les conditions $[\Delta_\omega, \Phi_\omega] = 0$ et $\Phi_\omega^2 = 0$ se démontrent de la même manière. □

Ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 5.1. Une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire $(\Gamma(\bigwedge A), \Delta', d_{A^*}, \Phi')$ est dite *liée à* $(\Gamma(\bigwedge A), \Delta, d_{A^*}, \Phi)$ *par twisting* s'il existe $\omega \in \Gamma(\bigwedge^2 A^*)$ tel que $\Delta' = \Delta_\omega$ et $\Phi' = \Phi_\omega$.

On a le résultat suivant :

Proposition 5.2. Soit $A^* \to M$ un algébroïde de Lie ; alors la relation de twisting sur les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Gamma(\bigwedge A)$ est une relation d'équivalence.

Démonstration : La réflexivité et la symétrie sont évidentes. Montrons la transitivité. En effet, soient $(\Gamma(\bigwedge A), \Delta, d_{A^*}, \Phi)$, $(\Gamma(\bigwedge A), \Delta', d_{A^*}, \Phi')$, $(\Gamma(\bigwedge A), \Delta'', d_{A^*}, \Phi'')$ trois structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $(\Gamma(\bigwedge A)$ telles que

$$(\Gamma(\bigwedge A), \Delta', d_{A^*}, \Phi') \sim (\Gamma(\bigwedge A), \Delta, d_{A^*}, \Phi) \ (mod\ \omega), \qquad \omega \in \Gamma(\bigwedge^2 A^*),$$

$$(\Gamma(\bigwedge A), \Delta'', d_{A^*}, \Phi'') \sim (\Gamma(\bigwedge A), \Delta', d_{A^*}, \Phi') \ (mod\ \omega'), \qquad \omega' \in \Gamma(\bigwedge^2 A^*),$$

i.e.,

$$\Delta' = \Delta + [d_{A^*}, i_\omega], \quad \Phi' = \Phi + [\Delta, i_\omega] - \frac{1}{2} i_{[\omega,\omega]_{A^*}},$$

$$\Delta'' = \Delta' + [d_{A^*}, i_{\omega'}], \quad \Phi'' = \Phi' + [\Delta', i_{\omega'}] - \frac{1}{2} i_{[\omega',\omega']_{A^*}}.$$

Alors on a :

$$\Delta'' = \Delta + [d_{A^*}, i_{\omega''}], \quad \Phi'' = \Phi + [\Delta, i_{\omega''}] - \frac{1}{2} i_{[\omega'',\omega'']_{A^*}}$$

où $\omega'' = \omega + \omega'$. D'où $(\Gamma(\bigwedge A), \Delta'', d_{A^*}, \Phi'') \sim (\Gamma(\bigwedge A), \Delta, d_{A^*}, \Phi)$ $(mod\ \omega'')$. $\square$

Dans [15], on définit aussi une notion analogue de twisting pour les bigébroïdes de quasi-Lie, qui généralise celle définie pour les quasi-bigèbres de Lie [3, 7] ; montrons que les expressions correspondantes du crochet et du défaut dans le cas des algèbres quasi-Gerstenhaber différentielles coïncident avec celles que nous obtenons ici pour le twisting sur les algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles. Soit $(\Gamma(\bigwedge A), \Delta, d_{A^*}, \Phi)$ une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire et soit $(\Gamma(\bigwedge A), d_{A^*}, [\ ,\ ]_\Delta, \Psi_\Phi)$ l'algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle correspondante ; sous l'action du twist par $\omega \in \Gamma(\bigwedge^2 A^*)$, nous obtenons une nouvelle algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle définie par

$$[X, Y]_{\Delta,\omega} = [X, Y]_\Delta + [X, Y]_\omega, \qquad X, Y \in \Gamma(A),$$

$$\Phi_\omega = \Phi + d_\Delta \omega - \frac{1}{2}[\omega, \omega]_{A^*},$$

où

$$[X, Y]_\omega = L^{A^*}_{\tilde{\omega}X} Y - L^{A^*}_{\tilde{\omega}Y} X - d_{A^*}(\omega(X, Y)), \quad X, Y \in \Gamma(A),$$

$$d_\Delta \omega = [\Delta, \omega],$$

avec $L^{A^*}_\alpha = [d_{A^*}, i_\alpha]$, pour tout $\alpha \in \Gamma(A^*)$, $(\tilde{\omega}X)(Y) = \omega(X, Y)$, $\forall X, Y \in \Gamma(A)$. Rappelons que Φ et Φ_ω sont vus comme éléments de $\Gamma(\bigwedge^3 A^*)$. Ainsi, nous retrouvons les formules du twisting pour les algèbres quasi-Gerstenhaber différentielles données dans [15] ; par conséquent nous venons de prouver le résultat suivant :

Proposition 5.3. Si deux structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle unimodulaire sur $\Gamma(\bigwedge A)$ sont équivalentes par twisting, alors il en est de même pour les structures d'algèbre quasi-Gerstenhaber différentielle correspondantes.

On voit ainsi que les différentes notions de twisting sont équivalentes, c'est-à-dire qu'on a une seule opération qui se transmet de structure à structure par les différentes correspondances. Dans tous les cas, la relation de twisting est une relation d'équivalence ; c'est donc un outil permettant d'étudier les structures quasi en termes de classes d'équivalence.

Remerciements : L'auteur tient à remercier Y. Kosmann-Schwarzbach pour ses très nombreuses remarques et suggestions, et pour l'avoir invité au Centre de Mathématiques (UMR 7640 du CNRS) de l'Ecole Polytechnique (France), séjour au cours duquel ce travail a été réalisé. Il remercie J. Huebschmann pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ses remarques. Les remerciements vont également à la Mission de Coopération de l'Ambassade de France à Conakry (Rép. de Guinée) pour le support financier qui a permis la réalisation de ce travail.

References

[1] F. Akman, On some generalizations of Batalin-Vilkovisky algebras, *J. Pure Appl. Alg.* 120 (1997) 105-141.

[2] M. Bangoura, Quasi-bigèbres de Lie et algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles, *Comm. in Algebra* 31 (2003) 29-44 .

[3] V. G. Drinfeld, Quasi-Hopf algebras, *Leningrad Math. J.* 1 (6) (1990), 1419-1457.

[4] E. Getzler, Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories, *Comm. Math. Phys.* 159 (1994) 265-285.

[5] E. Getzler, Manin pairs and topological conformal field theory, *Ann. Phys. (N.Y)* 237 (1995) 161-201.

[6] J. Huebschmann, Higher homotopies and Maurer-Cartan algebras: quasi-Lie-Rinehart, Gerstenhaber, and Batalin-Vilkovisky algebras, in *The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry*, Festschrift in Honor of Alan Weinstein, J. E. Marsden, T. S. Ratiu, éds., Progr. Math. 232, Birkhäuser (2005), p. 237-302.

[7] Y. Kosmann-Schwarzbach, Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups, *Contemporary Mathematics* 132 (1992) 459-489.

[8] Y. Kosmann-Schwarzbach, Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids, *Acta Appl. Math.* 41 (1995) 153-165.

[9] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, Poisson-Nijenhuis structures, *Annales Inst. Henri Poincaré* A 53(1) (1990), 35-81.

[10] J.-L. Koszul, Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie, *Astérisque*, hors série (1985) 257-271.

[11] T. Lada, M. Markl, Strongly homotopy Lie algebras, *Comm. in Algebra* 23 (1995) 2147-2161.

[12] K. Mackenzie, *Lie Groupoids and Lie Algebras in Differential Geometry*, Volume 124 of LMS lecture notes series, Cambridge Univ. Press (1987).

[13] K. Mackenzie, P. Xu, Lie bialgebroids and Poisson groupoids, *Duke Math. J.* 73 (1994) 415-452.

[14] D. Roytenberg, Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds, math.DG/9910078.

[15] D. Roytenberg, Quasi-Lie bialgebroids and twisted Poisson manifolds, math.QA/0112152, *Lett. Math. Phys.* 61 (2002) 123-127.

[16] P. Ševera, A. Weinstein, Poisson geometry with a 3-form background, math.SG/0107133, *Prog. Theor. Physics, Supplement*, 144 (2001) 145-154.

[17] P. Xu, Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry, *Comm. Math. Phys.* 200 (1999) 545-560.

Momo Bangoura
Département de Mathématiques, Université de Conakry,
BP 1147, Guinée
angoura@gn.refer.org