Lokale L-Funktionen, der lokale Führer und ein Resümee des Zusammenhangs zwischen Neuformen und kuspidalen automorphen Darstellungen

Gabor Wiese

Essen, 14. Juni 2007

Disclaimer: Viele der gegebenen Beweisskizzen, Bemerkungen etc. sind recht schnell von mir selbst erstellt worden, ohne dass ich alle Details überprüft habe. Dies war notwendig, da die verwendete Literatur doch sehr oberflächlich und ungenau ist. Daher kann und wird ein Teil wohl falsch oder zumindest nicht ganz richtig sein.

1 Zusammenstellung verschiedener Definitionen und Resultate

1.1 Klassifikation lokaler zulässiger Darstellungen

Aus Franziskas und Georgs Vortrag kennen wir die Klassifikation irreduzibler lokaler Darstellungen. Wie wiederholen diese kurz.

Satz 1.1 *Sei (π, V) eine irreduzible zulässige unendlich-dimensionale Darstellung von $\mathrm{GL}_2(F)$ mit einem p-adischen Körper $F/\mathbb{Q}_p$.*

Dann ist (π, V) von einem der folgenden drei Typen:

- *Irreduzible Hauptreihendarstellung (i_χ, V_χ) mit $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ für Charaktere (d. h. lokal konstante Gruppenhomomorphismen) $\chi_i : F^\times \to \mathbb{C}^\times$.*

  Eine Hauptreihendarstellung ist genau dann reduzibel, wenn $\chi_1\chi_2^{-1} = |\cdot|^{\pm 1}$.

- *Steinberg-Darstellungen (bzw. spezielle Darstellungen). Als solche bezeichnet man sowohl die eindeutige unendlich-dimensionale Unterdarstellung von (π_χ, V_χ) für*

  $$\chi = (\nu\,|\cdot|^{1/2}, \nu\,|\cdot|^{-1/2})$$

  als auch die eindeutige unendliche-dimensionale Quotientendarstellung von (π_χ, V_χ) für

  $$\chi = (\nu\,|\cdot|^{-1/2}, \nu\,|\cdot|^{1/2}),$$

  wobei $\nu : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Charakter ist.

- *Superkuspidale Darstellungen. Die anderen.*

1.2 Klassifikation reeller zulässiger Darstellungen

Satz 1.2 *Für jedes $k \geq 2$ gibt es quadrat-integrierbare zulässige irreduzible Darstellungen von $G_\infty = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, die mit (π_k, V_k) bezeichnet und* diskrete Reihendarstellungen von Gewicht k *genannt werden.*

Jede quadrat-integrierbare zulässige irreduzible Darstellung von G_∞ ist von der Form $\pi_k \otimes \chi$ mit einem unitären Charakter $\chi : G_\infty \to \mathbb{C}^\times$.

Beweis. [Ro2], Prop. 2.5. □

1.3 Unverzweigte lokale Darstellungen

Wir wiederholen kurz wichtige Punkte aus Ralf Butenuths Vortrag. Diese wurden zum Teil aufgeschreiben, aber nicht gehalten. Außerdem ergänzen wir Resultate aus [Bu], 4.6.

Es sei wieder $F/\mathbb{Q}_p$ ein p-adischer Körper, $\mathcal{O}$ der Ring der ganzen Zahlen, $\mathfrak{p} = (\varpi)$ das maximale Ideal, $q = \#(\mathcal{O}/\mathfrak{p})$, $G_\mathfrak{p} = \mathrm{GL}_2(F)$ und $K_\mathfrak{p} = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$.

Die sphärische (oder unverzweigte) Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{K_\mathfrak{p}}$ ist

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{K_\mathfrak{p}} &= \{f : G_\mathfrak{p} \to \mathbb{C} \mid f \text{ lokal konstant mit komp. Träger, } f(k_1 g k_2) = f(g)\ \forall k_1, k_2 \in K_\mathfrak{p}, g \in G_\mathfrak{p}\} \\ &= \langle \chi_{K\left(\begin{smallmatrix}\varpi^a & 0 \\ 0 & \varpi^b\end{smallmatrix}\right)K} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \geq b \rangle_\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Die behauptete Gleichheit ergibt sich aus der Cartan-Zerlegung. Die Hecke-Algebra ist mit dem Faltungsprodukt versehen:

$$(f * g)(x) = \int_{G_\mathfrak{p}} f(y) g(y^{-1}x) dy.$$

Dabei nehmen wir durchgängig an, dass $K_\mathfrak{p}$ das Maß 1 hat, also $\int_{K_\mathfrak{p}} dy = 1$.

Satz 1.3 *Die sphärische Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{K_\mathfrak{p}}$ ist abelsch.*

Definition 1.4 *Eine zulässige, unendlich-dimensionale Darstellung (π, V) von $G_\mathfrak{p}$ heißt* unverzweigt, *falls $V^{K_\mathfrak{p}} \neq (0)$.*

Satz 1.5 *Ist (π, V) eine zulässige unendlich-dimensionale irreduzible unverzweigte Darstellung von $G_\mathfrak{p}$, dann ist $\dim V^{K_\mathfrak{p}} = 1$.*

Die unverzweigten zulässigen unendlich-dimensionalen irreduziblen Darstellungen von $G_\mathfrak{p}$ stehen in Bijektion zu den $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismen $\mathcal{H}_{K_\mathfrak{p}} \to \mathbb{C}$.

Definition 1.6 *Für $k \geq 0$ sei $T_{\mathfrak{p}^k}$ die charakteristische Funktion der Menge*

$$\{g \in \mathcal{O}^{2\times 2} \mid (\det(g)) = \mathfrak{p}^k\}.$$

Sei ferner $R_\mathfrak{p}$ die charakteristische Funktion von $K_\mathfrak{p}\left(\begin{smallmatrix}\varpi & 0 \\ 0 & \varpi\end{smallmatrix}\right)K_\mathfrak{p} = K_\mathfrak{p}\left(\begin{smallmatrix}\varpi & 0 \\ 0 & \varpi\end{smallmatrix}\right)$.

Mittels des Gauß-Algorithmus kann man einfach einsehen, dass

$$T_{\mathfrak{p}} = \chi_{K_{\mathfrak{p}}\left(\begin{smallmatrix}\varpi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)K_{\mathfrak{p}}}$$

gilt, indem man nämlich die Matrix $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ von Determinante ϖ auf Stufenform bringt: im ersten Schritt auf die Form $\left(\begin{smallmatrix}a' & b'\\ 0 & d'\end{smallmatrix}\right)$ oder $\left(\begin{smallmatrix}0 & b'\\ c' & d'\end{smallmatrix}\right)$ und im zweiten Schritt dann auf $\left(\begin{smallmatrix}a' & 0\\ 0 & d'\end{smallmatrix}\right)$ oder $\left(\begin{smallmatrix}0 & b'\\ c' & 0\end{smallmatrix}\right)$. Mittels $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ kann man dann die gewünschte Diagonalform erhalten.

Satz 1.7 *(a) Für $k \geq 1$ gilt $T_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{p}^k} = T_{\mathfrak{p}^{k+1}} + qR_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{p}^{k-1}}$.*

(b) Die sphärische Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{K_{\mathfrak{p}}}$ wirt erzeugt von $T_{\mathfrak{p}}$, $R_{\mathfrak{p}}$ und $R_{\mathfrak{p}}^{-1}$.

Beweis. (a) [Bu], Prop. 4.6.4.
(b) [Bu], Prop. 4.6.5. □

Wir erinnern an die (normierte) Bewertungsabbildung

$$0 \to \mathcal{O}^\times \to F^\times \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \to 0.$$

Nach Definition ist ein Charakter

$$\chi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$$

unverzweigt, wenn er auf $\mathcal{O}^\times$ trivial (d. h. gleich 1) ist. Somit sind die unverzweigten Charaktere genau durch ihren Wert bei ϖ gegeben, da ja mittels der Bewertung

$$F^\times = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \varpi^n \mathcal{O}^\times$$

eine disjunkte Zerlegung in offene und abgeschlossene Mengen gegeben ist.

Theorem 1.8 *Sei (π, V) eine unverzweigte irreduzible unendlich-dimensionale zulässige Darstellung von $G_{\mathfrak{p}}$. Seien λ, μ die Eigenwerte von $T_{\mathfrak{p}}$ bzw. $R_{\mathfrak{p}}$ auf dem 1-dimensionalen Vektorraum $V^{K_{\mathfrak{p}}}$. Sei ferner*

$$X^2 - q^{\frac{1}{2}}\lambda X + \mu = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Seien

$$\chi_i : F^\times \to \mathbb{C}^\times$$

die unverzweigten Charaktere, die durch $\chi_i(\varpi) = \alpha_i$ gegeben sind.

Dann ist (π, V) die unverzweigte Hauptreihendarstellung (i_χ, V_χ) mit $\chi = (\chi_1, \chi_2)$.

Beweis. Siehe [Bu], Thm. 4.6.4. Wir geben eine Skizze. Zunächst rechnet man nach (siehe [Bu], Prop. 4.6.6), dass die Eigenwerte von $T_{\mathfrak{p}}$ und $R_{\mathfrak{p}}$ auf $V_\chi^{K_{\mathfrak{p}}}$ gleich den angegebenen sind. Da $T_{\mathfrak{p}}$, $R_{\mathfrak{p}}$ und $R_{\mathfrak{p}}^{-1}$ die Hecke-Algebra $\mathcal{H}_K$ erzeugen, folgt, dass V und V_χ beide denselben Charakter $\mathcal{H}_K \to \mathbb{C}$ definieren.

Dasselbe Argument funktioniert übrigens auch für $(i_{\chi'}, V_{\chi'})$ mit $\chi' = (\chi_2, \chi_1)$. Ist eine von V_χ und $V_{\chi'}$ reduzibel, dann sind es beide. Eine von beiden hat eine 1-dimensionale Unterdarstellung, die dann auch denselben Hecke-Charakter hat. Damit wäre dann V 1-dimensional. Widerspruch. Also ist die Hauptreihendarstellung irreduzibel und somit gleich V. □

2 Zur lokalen Theorie

Notation

Wir folgen im Folgenden dem Artikel von Deligne [De], werden uns aber bemühen, die Notationen aus Georgs Vortrag beizubehalten. Insbesondere, müssen alle Matrizen in Deligne der Involution

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} d & c \\ b & a \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

unterzogen werden.

Sei nun $F/\mathbb{Q}_p$ ein p-adischer Körper. Wir benutzen dieselben Notationen wie oben. Außerdem setzen wir wie schon in früheren Vorträgen

$$N = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}, \quad P = \{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}, \quad B = \{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)\}.$$

Wir fixieren außerdem einen nicht-trivialen additiven Charakter $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$. Das Whittaker-Funktional, das Kirillov-Modell und die folgenden Konstruktionen hängen von seiner Wahl ab, die Eigenschaften aber nicht; dies werden wir nicht nachrechnen.

Wir fixieren nun für den Rest dieses Abschnitts eine irreduzible unendlich-dimensionale zulässige Darstellung (π, V) von $G_\mathfrak{p}$. Sei ω_π ihr zentraler Charakter, also

$$\pi(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right))v = \omega_\pi(a)v$$

für alle $v \in V$ und alle $a \in F^\times$.

Whittaker-Funktional

Wir wissen, dass es zu (π, V) ein Whittaker-Funktional T, also eine lineare Abbildung $T : V \to \mathbb{C}$, gibt, so dass

$$T(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v) = \psi(t)v$$

für alle t.

Mittels des Whittaker-Funktionals kann man nun V sowohl in die lokal konstanten Funktionen $B \to \mathbb{C}$ als auch in die lokal konstanten Funktionen $P \to \mathbb{C}$, die jeweils auf N via ψ operieren, einbetten. Genauer betrachtet man

$$\mathrm{Ind}_N^P(\psi) = \{f : P \to \mathbb{C} \mid f(\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g) = \psi(t)f(g) \text{ lokal konstant } \}$$

und ähnlich für $\mathrm{Ind}_N^B(\psi)$.

Whittaker-Modell

Das *Whittaker-Modell* $W(\pi)$ (abhängig von ψ) ist, laut Georg und Rogawski, das Bild von V unter dem injektiven Homomorphismus von $\mathbb{C}[P]$-Moduln

$$V \to \mathrm{Ind}_N^P(\psi), \quad v \mapsto \big(g \mapsto T(\pi(g).v)\big).$$

Deligne zieht es vor, das Bild in $\mathrm{Ind}_N^B(\psi)$ zu betrachten, was aber keinen großen Unterschied macht, da Skalarmatrizen ja via Multiplikation mit dem Wert des zentralen Charakters operieren.

Kirillov-Modell

Es bezeichne $\mathcal{C}^\infty(F^\times)$ die Menge der lokal-konstanten Funktionen $F^\times \to \mathbb{C}$. Wir dehnen nun die P-Operation auf $\mathcal{C}^\infty(F^\times)$ aus Georgs Vortrag zu einer B-Operation aus, um Kompatibilität mit Delignes Artikel zu gewährleisten. Für $f : F^\times \to \mathbb{C}$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ setzen wir

$$((\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right).f)(x) = \omega_\pi(d)(\begin{pmatrix} a/d & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.f)(x) = \omega_\pi(d)(\begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a/d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.f)(x) = \omega_\pi(d)\psi(\frac{bx}{d})f(\frac{ax}{d}).$$

Hierbei mussten wir die Operation aus Georgs Vortrag leicht verändern; war sie vielleicht falsch durch einen Tippfehler von mir?

Wie Georg erklärt hat, kann man aus dem Whittaker-Modell das Kirillov-Modell machen. Genauer betrachtet man den injektiven B-Modulhomomorphismus

$$K : V \to \mathcal{C}^\infty(F^\times), \quad v \mapsto \big(x \mapsto v(x) := T((\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).v)\big).$$

Das Bild $K(\pi)$ dieser Abbildung heißt dann das *Kirillov-Modell*. Mit ihm werden wir im Folgenden arbeiten. Überprüfen wir zur Sicherheit doch noch eben, dass es sich um einen B-Modulhomomorphismus handelt (wegen der Diskrepanz mit der Definition mit Georgs Vortrag):

$$\begin{aligned}((\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right).v)(x) &= T((\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)v) = T((\left(\begin{smallmatrix} ax & bx \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)v) = T((\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} ax/d & bx/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}v) \\ &= \omega_\pi(d)T(\begin{pmatrix} 1 & bx/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax/d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}v) = \omega_\pi(d)\psi(\frac{bx}{d})T(\begin{pmatrix} ax/d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}v) \\ &= \omega_\pi(d)\psi(\frac{bx}{d})v(\frac{ax}{d}).\end{aligned}$$

Gruppentheoretische Vorbereitung

Wir benötigen nun zuerst ein gruppentheoretisches Lemma.

Lemma 2.1 *Setze*

$$\Gamma_1(\varpi^n) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) \mid \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mod \varpi^n\}$$

und

$$\Gamma_1'(\varpi^n) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid b \in \mathcal{O}, c \in \varpi^n\mathcal{O}\rangle \leq \mathrm{SL}_2(F).$$

Es gelten:

(i) Für $n > 0$ ist $\Gamma_1'(\varpi^n) = \Gamma_1(\varpi^n)$.

(ii) Für $n = 0$ ist $\Gamma_1'(\varpi^0) = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}) = \Gamma_1(\varpi^0)$.

(iii) Für $n < 0$ ist $\Gamma_1'(\varpi^n) = \mathrm{SL}_2(F)$.

Beweis. Genauso wie Deligne beweisen wir nur (i). Die anderen beiden gehen wohl mit ähnlichen Tricks, die ich mir jetzt aber nicht im einzelnen überlegt habe. Dafür erklären wir (i) aber ein bisschen mehr, was aber wohl nicht nötig wäre.

Seien $b, c \in \mathcal{O}$ mit $c \equiv 0 \mod \varpi^n$. Dann haben wir die Identität:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-b}{1+ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-c}{1+ab} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+ab} & 0 \\ 0 & 1+ab \end{pmatrix}.$$

Damit liegen alle diagonalen Matrizen von $\Gamma_1(\varpi^n)$ bereits in $\Gamma_1'(\varpi^n)$. Sei nun $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1'(\varpi^n)$. Dann ist

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & \frac{-b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right).$$

Dabei beachten wir, dass a wegen der Kongruenz $a \equiv 1 \mod \varpi^n$ invertierbar ist. Wie wir aber gerade gesehen haben, ist $\begin{pmatrix} a'^{-1} & 0 \\ 0 & d'^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_1'(\varpi^n)$. Da aber auch

$$\left(\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} a'^{-1} & 0 \\ 0 & d'^{-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1'(\varpi^n)$$

liegt, folgt Teil (i). □

Existenz von Neuvektoren und Führer

Bemerkung 2.2 *Zunächst machen wir eine Bemerkung zum Führer eines Charakters $\alpha : \mathcal{O}^\times \to \mathbb{C}^\times$. Der Führer von α ist das kleinste n, so dass der Charakter über $(\mathcal{O}/\varpi^n)^\times$ faktorisiert:*

$$\chi : \mathcal{O}^\times \twoheadrightarrow (\mathcal{O}/\varpi^n)^\times \to \mathbb{C}^\times.$$

Im Folgenden werden wir daher Charaktere von Führer n oft als Charaktere auf $(\mathcal{O}/\varpi^n)^\times$ betrachten.

Beweis. Per Definition ist der Führer das kleinste n, so dass α auf $1 + \varpi^n\mathcal{O}$ trivial (also gleich 1) ist. Die Aussage folgt dann aus der exakten Sequenz $0 \to 1 + \varpi^n\mathcal{O} \to \mathcal{O}^\times \to (\mathcal{O}/\varpi^n)^\times$. □

Wir setzen für $k \geq 0$

$$\widetilde{\Gamma}_0(\varpi^k) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(F) \mid \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \mod \varpi^k\}.$$

Insbesondere ist $\widetilde{\Gamma}_0(\varpi^0) = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$.

Lemma 2.3 *Seien $\alpha, \beta : \mathcal{O}^\times \to \mathbb{C}^\times$ Charaktere. Ist k größer gleich dem Führer von $\alpha\beta^{-1}$, dann existiert ein Charakter*

$$\chi_k : \widetilde{\Gamma}_0(\varpi^k) \to \mathbb{C},$$

so dass

$$\chi_k(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)) = \alpha(a)\beta(d) \text{ und } \chi_k(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = \alpha(a)\beta(d)$$

für alle $v \in V$ und alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \widetilde{\Gamma}_0(\varpi^k)$ gilt.

Beweis. Zunächst ist klar, dass wir den folgenden Charakter haben:

$$\beta(\det) : \widetilde{\Gamma}_0(\varpi^k) \to \mathbb{C}, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \beta(\det(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right))).$$

Außerdem ist der Charakter

$$\alpha\beta^{-1} : \widetilde{\Gamma}_0(\varpi^k) \to \mathbb{C}, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ 0 & \overline{d} \end{pmatrix} \mapsto (\alpha\beta^{-1})(\overline{a})$$

wohl definiert, wobei wir mit $\bar{\cdot}$ die Reduktion modulo ϖ^k andeuten. Nach obiger Bemerkung ist nämlich $\alpha\beta^{-1}$ auf $(\mathcal{O}/\varpi^k)^\times$ definiert.

Das Produkt beider Charaktere liefert den gewünschten Charakter, da $\beta(\det(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right))) = \beta(a)\beta(d)$ und $\alpha\beta^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)) = \alpha(a)\beta^{-1}(a)$ ist (ähnlich für $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$). □

Theorem 2.4 *Seien $\alpha, \beta : \mathcal{O}^\times \to \mathbb{C}^\times$ Charaktere, die $\alpha\beta = \omega_\pi$ erfüllen. Für k größer gleich dem Führer von $\alpha\beta^{-1}$ sei*

$$X_k = \{v \in V \mid g.v = \chi_k(g)v \ \forall g \in \widetilde{\Gamma}_0(\varpi^k)\}.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) Es gibt ein $n \geq k$, so dass $X_n \neq (0)$.

(b) Sei n das Minimum, so dass $X_n \neq (0)$. Die Dimension von X_n ist gleich 1.

Beweis. Wir beweisen nur (a) und übergehen die Dimensionsberechnung, es sei denn, ich finde noch Zeit...

Wir verändern unsere Wahl von ψ so, dass $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ auf $\mathcal{O}$ trivial (also gleich 1) ist. Dies dürfen wir, obwohl wir uns davon nicht überzeugt haben...

Zunächst zeigen wir, dass es Vektoren $0 \neq v \in V$ gibt, so dass

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) v = \alpha(a)\beta(d)v$$

mit $a, d \in \mathcal{O}^\times$ und $b \in \mathcal{O}$ gilt. Dazu verwenden wir das Kirillov-Modell, auf dem wir die Borel-Operation ja ganz explizit hinschreiben können. Das tun wir dann jetzt auch mal:

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) v(x) = \omega_\pi(d)\psi(\frac{bx}{d})v(\frac{ax}{d}) = \alpha(d)\beta(d)v(\frac{ax}{d}),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass ψ auf $\mathcal{O}$ konstant gleich 1 ist. Dieser Ausdruck ist genau dann gleich $\alpha(a)\beta(d)v(x)$, wenn

$$v(\frac{ax}{d}) = \frac{\alpha(a)}{\alpha(d)}v(x)$$

gilt. Wir benötigen also eine lokal konstante Funktion $v : F^\times \to \mathbb{C}$, die der Transformationsregel

$$v(rx) = \alpha(r)v(x)$$

für alle $r \in \mathcal{O}^\times$ und alle $x \in F^\times$ genügt und außerdem im Kirillov-Modell liegt.

Schreiben wir also eine solche Funktion hin, ohne uns zunächst um die allerletzte Bedingung zu kümmern. Sei m der Führer von α. Wir wählen ein Vertretersystem in $\mathcal{O}^\times$ für $(\mathcal{O}/\varpi^m)^\times$. Dann haben wir die Zerlegung von $F^\times$ in disjunkte offene Mengen

$$F^\times = \bigcup_{t\in\mathbb{Z}} \bigcup_{s} \varpi^t s(1+\varpi^m\mathcal{O}),$$

wobei s das Vertretersystem für $(\mathcal{O}/\varpi^m)^\times$ durchläuft. Für $x = \varpi^t s(1+\varpi^m u)$ definieren wir

$$v(x) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \neq 0, \\ \alpha(s)v(1) & \text{wenn } n = 0. \end{cases}$$

Dabei haben wir die freie Wahl für $v(1)$. Wiederum haben wir benutzt, dass der Charakter α bereits auf $(\mathcal{O}/\varpi^m)^\times$ definiert ist. Die so definierte Funktion $v(x)$ ist lokal konstant und erfüllt die geforderte Transformationseigenschaft.

Die Funktion $v(x)$ hat außerdem einen kompakten Träger. Nun sagt ein Satz in [De], dass jede Funktion mit kompaktem Träger in $\mathcal{C}^\infty(F^\times)$ bereits im Kirillov-Modell liegt. Georg hat etwas ähnliches bewiesen. Mir ist gerade nicht klar, ob er genau dies gezeigt hat. In jedem Fall folgt, dass $v(x)$ im Kirillov-Modell liegt. Damit haben also einen Vektor $0 \neq v \in V$ mit der gewünschten Eigenschaft gefunden.

Nun benutzen wir die Glattheit von V und den Fakt, dass $J_n = M_2(1+\varpi^n\mathcal{O})$ eine Umgebungsbasis offener Normalteiler von $G_\mathfrak{p}$ bildet. Die Glattheit besagt dann, dass

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^{J_n}.$$

Der eben konstruierte Vektor v liegt in V^{J_n} für ein n. Er wird also insbesondere von $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $c \equiv 0 \mod \varpi^n$ stabilisiert. Genauso wie im gruppentheoretischen Lemma oben (das wir also direkt für $\widetilde{\Gamma}_0(\varpi^n)$ hätten formulieren sollen) sieht man, dass das Erzeugnis der $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $a, d \in \mathcal{O}^\times$, $b \in \mathcal{O}$ und $c \in \varpi^n$ gleich $\widetilde{\Gamma}_0(\varpi^n)$ ist. Daher ist $v \in X_n$.

Wir bemerken nur noch kurz, dass X_n endlich-dimensional ist, da es eine Teilmenge von V^{J_m} (endlich-dimensional wegen der Zulässigkeit) ist, wenn $m \geq n$ und größer gleich dem Maximum der Führer von α und β ist. $\square$

Definition 2.5 *Wir wenden das Theorem auf $\alpha = 1$ und $\beta = \omega_\pi$ an.*

Der Führer von π *ist gleich $\mathfrak{p}^n$, wobei wir das n aus (b) nehmen.*

Ein Neuvektor von π *ist jedes $0 \neq v \in X_n$ mit dem n aus (b).*

Dies können wir noch expliziter äquivalent formulieren. Der Führer ist $\mathfrak{p}^n$, wenn n minimal ist, so dass es einen Vektor $0 \neq v \in V$ gibt, der unter der Gruppe

$$\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \mid \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mod \varpi^n\}$$

invariant ist.

Bemerkung 2.6 *Der Führer ist genau dann* 1*, wenn die Darstellung unverzweigt ist, da dies ja Invarianz unter $K_\mathfrak{p} = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ bedeutet. Der Neuvektor ist dann in $V^{K_\mathfrak{p}}$.*

Explizite Führer

Wir zitieren noch einen Satz über die explizite Bestimmung der Führer in den einzelnen Fällen aus [DI].

Satz 2.7 *Sei (π, V) eine irreduzible unendlich-dimensionale zulässige Darstellung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.*

(a) Ist $(\pi, V) = (i_\chi, V_\chi)$ mit $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ eine Hauptreihe, dann ist der Führer von π das Produkt der Führer der Charaktere χ_1 und χ_2.

(b) Ist (π, V) die Steinberg-Darstellung in der Hauptreihe mit Charakteren $(\chi|\cdot|^{1/2}, \chi|\cdot|^{-1/2})$ bzw. $(\chi|\cdot|^{-1/2}, \chi|\cdot|^{1/2})$, dann ist der Führer gleich $\mathfrak{f}^2 \cap p\mathbb{Z}_p$ mit dem Führer $\mathfrak{f}$ von χ.

(c) Ist (π, V) superkuspidal, dann ist der Führer gleich $p^n\mathbb{Z}_p$ für ein $n \geq 2$.

Lokaler L-Faktor

Diesen und den nächsten Punkt benötigen wir in diesem Vortrag nicht. Sie dienen aber als Vorbereitung für den Vortrag zur lokalen Langlands-Korrespondenz.

Definition 2.8 *Sei (π, V) eine irreduzible unendlich-dimensionale zulässige Darstellung von $G_\mathfrak{p}$. Wir definieren den* lokalen L-Faktor *von (π, V) wie folgt:*

(a) Sei $(\pi, V) = (i_\chi, V_\chi)$ mit $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ eine irreduzible Hauptreihe. Dann setze

$$L(s, \pi) = (1 - \alpha_1 q^{-s})^{-1}(1 - \alpha_2 q^{-s})^{-1},$$

wobei für $i = 1, 2$

$$\alpha_i := \begin{cases} \chi_i(\varpi) & \text{wenn } \chi_i \text{ unverzweigt ist,} \\ 0 & \text{wenn } \chi_i \text{ verzweigt ist.} \end{cases}$$

(b) Sei (π, V) eine Steinberg-Darstellung in der Hauptreihe mit Charakteren $(\chi|\cdot|^{1/2}, \chi|\cdot|^{-1/2})$ bzw. $(\chi|\cdot|^{-1/2}, \chi|\cdot|^{1/2})$. Dann setze

$$L(s, \pi) = (1 - \alpha q^{-s})^{-1}$$

mit α wie oben.

(c) Sei (π, V) superkuspidal. Dann setze

$$L(s, \pi) = 1.$$

Bemerkung 2.9 *Sei $(\pi, V) = (i_\chi, V_\chi)$ mit $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ eine unverzweigte (automatisch irreduzible) Hauptreihe. Seien dann λ der Eigenwert von $T_\mathfrak{p}$ und μ der Eigenwert von $R_\mathfrak{p}$ (wie in der Diskussion der unverzweigten lokalen Darstellungen oben). Dann gilt:*

$$L(s, \pi) = (1 - \lambda q^{\frac{1}{2}-s} + \mu q^{-2s})^{-1},$$

wie man durch Ausmultiplizieren sieht.

Die obige ad-hoc-Definition hat auch eine analytische Beschreibung.

Satz 2.10 *Sei (π, V) eine irreduzible unendlich-dimensionale zulässige Darstellung von $G_\mathfrak{p}$.*

(a) Wir betrachten das Integral

$$Z(s, v) = \int_{F^\times} v(y)|y|^{s-\frac{1}{2}} dy,$$

wobei $v(y)$ das Bild von $v \in V$ im Kirillov-Model ist. Das Integral ist konvergent für genügend großen Realteil von s und hat eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$. Genauer, für jedes v gibt es ein Polynom $p_v \in \mathbb{C}[X]$, so dass

$$Z(s, v) = p_v(q^{-s})L(s, \pi).$$

Außerdem gibt es ein $0 \neq v \in V$, so dass $p_v = 1$.

(b) Sei $\xi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Charakter. Dann konvergiert das Integral

$$Z(s, v, \xi) = \int_{F^\times} v(y)\xi(y)|y|^{s-\frac{1}{2}} dy$$

für s mit genügend großem Realteil und hat eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$. Genauer, gilt

$$Z(s, v, \xi) = p_{v,\xi}(q^{-s})Z(s, \pi \otimes \xi)$$

mit einem Polynom $p_{v,\xi} \in \mathbb{C}[X]$.

Beweis. [Bu], Prop. 4.7.5. □

Lokale Funktionalgleichung

Satz 2.11 (Lokale Funktionalgleichung) *Sei (π, V) eine irreduzible unendlich-dimensionale zulässige Darstellung von $G_\mathfrak{p}$ mit zentralem Charakter ω_π. Sei $\xi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Charakter.*

Dann gibt es eine meromorphe Funktion $\gamma(s, \pi, \xi, \psi)$, so dass für alle $v \in V$ die Gleichung

$$Z(1 - s, S.v, \omega^{-1}\xi^{-1}) = \gamma(s, \pi, \xi, \psi)Z(s, v, \xi)$$

gilt. Dabei ist $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Spiegelungsmatrix.

Bump betont die Abhängigkeit von ψ explizit, da ja das Kirillov-Modell von der Wahl von ψ abhängt.

Proof. [Bu], Thm. 4.7.5. □

Satz 2.12 *Sind* (π_1, V_1) *und* (π_2, V_2) *zwei irreduzible unendlich-dimensionale zulässige Darstellungen von* $G_{\mathfrak{p}}$ *mit demselben zentralen Charakter* ω *und gilt*

$$\gamma(s, \pi_1, \xi, \psi) = \gamma(s, \pi_2, \xi, \psi)$$

für alle unitären Charaktere $\xi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$*, dann sind* π_1 *und* π_2 *isomorph.*

Beweis. [Bu], Prop. 4.7.6. □

3 Zur globalen Theorie

In diesem Teil beschränken wir uns auf den Grundkörper $\mathbb{Q}$. Wir erinnern an die Einbettung der Spitzenformen in die kuspidalen automorphen Formen

$$S_k(N, \omega') \hookrightarrow \mathcal{A}_0(\omega), \quad f \mapsto \Phi_f$$

aus Gebhards Vortrag. Dabei ist ω der Hecke-Charakter, der zum Dirichlet-Charakter ω' gehört (an der reellen Stelle ist er per Definition trivial). Diese Einbettung wiederholen wir jetzt nicht genauer. Siehe auch Ralf Butenuths Vortrag. Das einzige, das wir neben der Existenz in diesem Überblicksteil benötigen, ist, dass die Einbettung $\mathbb{C}$-linear ist.

Die Operation der Hecke-Algebra auf den automorphen Formen ist noch nicht richtig erklärt worden. Rogawski ([Ro2]) ist ungenau; er spricht von Rechts-Translation mit der charakteristischen Funktion (was streng genommen keinen Sinn ergibt).

Was ist denn der globale Hecke-Operator auf einer globalen automorphen Darstellung? Es ist wohl die Doppelnebenklasse

$$(\dots, 1, K_p \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) K_p, 1, \dots).$$

Ist eine automorphe Form bei p unverzweigt, dann ist sie (von rechts) bei p invariant unter K_p. Man könnte jetzt als Definition des Hecke-Operators nehmen:

$$T_p f(x_\infty, x_2, \dots, x_p, \dots) = \sum_i f(x_\infty, x_2, \dots, g_i^{-1} x_p, \dots),$$

wobei $K_p \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) K_p = \bigcup_i g_i K_p$ eine Nebenklassenzerlegung der Doppelnebenklasse ist. Genausogut kann man aber auch das Faltungsprodukt mit der charakteristischen Funktion nehmen:

$$\begin{aligned}
(T_p f)(x_\infty, x_2, \dots, x_p, \dots) &= \int_{G_p} \chi_{K_p \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) K_p}(h) f(x_\infty, x_2, \dots, h^{-1}x_p, \dots) dh \\
&= \int_{K_p \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) K_p} (h) f(x_\infty, x_2, \dots, h^{-1}x_p, \dots) dh \\
&= \sum_i \int_{g_i K_p} f(x_\infty, x_2, \dots, h^{-1}x_p, \dots) dh \\
&= \sum_i \int_{K_p} f(x_\infty, x_2, \dots, h^{-1}g_i^{-1}x_p, \dots) dh \\
&= \sum_i f(x_\infty, x_2, \dots, g_i^{-1}x_p, \dots),
\end{aligned}$$

da das Haarmaß auf K_p auf 1 normiert ist und außerdem f von rechts K_p-invariant ist. Machen wir die Nebenklassenzerlegung "anders herum", dann verschwindet das hässliche Inverse.

Der folgende Satz besagt, dass der klassische Hecke-Operator auf den Spitzenformen bis auf einen Normierungsfaktor mit dem auf den automorphen Formen übereinstimmt.

Satz 3.1 *Sei $(p, N) = 1$. Dann gilt $p^{\frac{k}{2}-1}(T'_p \Phi_f) = \Phi_{T_p f}$.*

Beweis. Für eine Beweisskizze siehe Ralf Butenuths Vortrag. Diese kommt aus [Ro2]; um sie zu verstehen, müsste man erstmal die Operation richtig definieren. □

Theorem 3.2 *Sei $f \in S_k(N, \omega')$ eine Spitzenform von Gewicht k, Stufe N mit Dirichlet-Charakter $\omega' : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$. Wir nehmen an, dass f eine Hecke-Eigenform für T_p mit (p, N) ist; genauer verlangen wir, dass*

$$T_p f = \lambda_p f$$

für alle Primzahlen p mit $(p, N) = 1$ gilt. Ferner sei $V(f) = G(\mathbb{A})\Phi_f \in \mathcal{A}_0(\omega)$ die Bahn. Sei π_f die Darstellung von $G(\mathbb{A})$ auf $V(f)$.

Dann ist $(\pi_f, V(f))$ eine irreduzible zulässige Darstellung und die Komponenten

$$\pi_f = \pi_\infty \otimes \bigotimes_{p \text{ Primzahl}} \pi_p$$

erfüllen:

(i) $\pi_\infty = \pi_k$.

(ii) Für alle $p \nmid N$ ist π_p unverzweigt, gleich der Hauptreihe i_χ mit $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ und es gilt

$$\lambda_p = p^{\frac{k-1}{2}}(\chi_1(p) + \chi_2(p)) \text{ und } \omega_{\pi_p}(p) = \chi_1(p)\chi_2(p).$$

Ist $f' \in S_k(N, \omega)$ eine andere Spitzenform, so dass $T_p f' = \lambda'_p f'$ für alle $(p, N) = 1$, dann ist genau dann $V(f) = V(f')$, wenn $\lambda_p = \lambda'_p$ für alle p bis auf endlich viele erfüllt ist.

Beweis. Siehe [Ro2], Proposition 2.13. Die Eigenwerte von T_p ergeben sich sofort aus der lokalen Formel durch Multiplikation mit dem Faktor $p^{\frac{k}{2}-1}$, der im vorherigen Satz auftritt.

Die letzte Aussage folgt aus starker Multiplizität 1. □

Definition 3.3 *Sei (π, V) eine zulässige, irreduzible Darstellung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, die nach dem Tensorproduktsatz als das eingeschränkte Tensorprodukt der (π_p, V_p) zerfällt. Dieses werde bzgl. einer Kollektion von Vektoren v_p für p an den unverzweigten Stellen gebildet. Diese v_p liegen im 1-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $V_p^{K_p}$ und sind daher bis auf Skalare eindeutig und Neuvektoren. An allen anderen (d. h. verzweigten) endlichen Stellen wählen wir einen Neuvektor v_p (der auch bis auf Skalare eindeutig ist). Auch bei ∞ wählen wir einen Vektor v_∞, der aber von Deligne übergangen wird.*

Der Vektor

$$v = v_\infty \otimes \bigotimes_{p \text{ Primzahl}} v_p$$

heißt der Neuvektor *der Darstellung (π, V).*

Der Führer *des Neuvektors v ist das Produkt der lokalen Führer an den endlichen Stellen.*

Definition 3.4 *Sei $f \in S_k(N, \omega')$ eine Eigenform für T_p mit $(p, N) = 1$ und $V(f) \subset \mathcal{A}_0(\omega)$ die automorphe Unterdarstellung zu f.*

Der Neuvektor v von $V(f)$ heißt Neuform.

Bemerkung 3.5 *Der Neuvektor $v \in V(f)$ kommt von einer Modulform, deren Stufe gleich dem Führer des Neuvektors (bzw. der Neuform) ist.*

Satz 3.6 *Die Menge der Neuformen (bis auf Skalare) ist in Bijektion mit der Menge der irreduziblen Unterdarstellungen von $\mathcal{A}_0$ (ohne den zentralen Charakter zu spezifizieren). Die Abbildungen sind dadurch gegeben, dass einer Neuform f die Unterdarstellung $V(f)$ (in obiger Notation) und einer Unterdarstellung $V \subset \mathcal{A}_0$ ihre Neuform zugeordnet wird.*

Proof. Der Satz ist nach Definition richtig (also eigentlich gar kein Satz). Allerdings muss man sich gut überlegen, wie die Auswahl der definierenden Vektoren des eingeschränkten Tensorproduktes eingeht.

Man muss die Abbildung $f \mapsto V(f)$ wohl mit etwas mehr Struktur versehen. Genauer sollten wir f neben $V(f)$ auch dessen Tensorproduktzerlegung zusammen mit einer das Tensorprodukt definierenden Kollektion von Vektoren $0 \neq v_p \in V_p^{K_p}$ für alle $(p, N) = 1$ zuordnen. Die Rückabbildung ist dann auch bzgl. dieser Kollektion: wir haben nur die Wahl eines Neuvektors an endlich vielen Stellen (denn - nochmal - an den unverzweigten Stellen nehmen wir die fixierten v_p); d. h. an endlich vielen Stellen hängt unser Neuvektor von einem Skalar ab, dieser zieht sich aber als (endliches) Produkt heraus, was gerade die Abhängigkeit der Neuform bis aus Skalare erklärt.

Dieses Argument zeigt, dass die Zuordnung (mit den gerade beschriebenen Zusatzstrukturen) $f \mapsto V(f) \mapsto$ Neuvektor in $V(f)$ die Identität ergibt.

In der umgekehrten Richtung gebrauchen wir die Zusatzstruktur nicht: in V wählen wir einen Neuvektor $v \in V$, dessen Bahn unter $G(\mathbb{A})$ dann natürlich wegen der Irreduzibilität wieder gleich V ist. $\square$

Literatur

[Bu] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 55.

[De] Deligne: Aufsatz 2 in [MF].

[DI] F. Diamond and J. Im, *Modular Forms and Modular Curves*

[MF] ed. W. Kuyk and J.-P. Serre, *Modular functions of one variable III*, Proceedings of the International Summer School, University of Antwerp, RUCA, July 17–August 3, 1972, LNM **350**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[Ro1] J. Rogawski, *Modular Forms, the Ramanujan Conjecture, and the Jacquet-Langlans correspondence*, available online at http://www.math.ucla.edu/$\sim$jonr/eprints/lub.pdf

[Ro2] J. Rogawski, *Admissible representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$*: p-adic case*, available online at http://www.math.ucla.edu/$\sim$jonr/eprints/padic.pdf