Was Hecke uns über Galois lehrt.

Gabor Wiese

Institut für Experimentelle Mathematik

Universität Duisburg-Essen

2. Juni 2010

Zahlentheorie

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Zahlentheorie

Galois

Hecke

Deligne

Serre

Zahlentheorie

Was Hecke uns über Galois lehrt.

Galois

Hecke

Deligne

Serre

Die Hauptakteure

Evariste Galois

1811-1832

Erich Hecke

1887-1947

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von

Symmetrien von Gleichungen.

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

$$0 = x^2 + px + q$$

Finde x!

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

$0 = x^2 + px + q$ Finde x!

pq-Formel: $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, $x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

$0 = x^2 + px + q$ Finde x!

pq-Formel: $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, $x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Beispiel: $0 = x^2 - x - 2$ hat Lösungen $x = -1$, $x = 2$.

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

$0 = x^2 + px + q$ Finde x!

pq-Formel: $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, $x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Beispiel: $0 = x^2 - x - 2$ hat Lösungen $x = -1$, $x = 2$.

Beispiel: $0 = x^2 - x - 1$ hat Lösungen

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

$$0 = x^2 + px + q$$

pq-Formel

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

$0 = x^2 + px + q$ pq-Formel

$0 = x^3 + px^2 + qx + r$ Formel von Cardano

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

$0 = x^2 + px + q$	pq-Formel
$0 = x^3 + px^2 + qx + r$	Formel von Cardano
$0 = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$	Formel von Ferrari

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

$0 = x^2 + px + q$	pq-Formel
$0 = x^3 + px^2 + qx + r$	Formel von Cardano
$0 = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$	Formel von Ferrari
$0 = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$	???

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von

Symmetrien von Gleichungen.

$0 = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ Finde x!

Idee (Galois): Solche Gleichungen erfüllen Symmetrien.

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

$0 = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ Finde x!

Idee (Galois): Solche Gleichungen erfüllen Symmetrien.

Die Symmetrien in der Gleichung $x^2 + px + q$ spiegeln sich in der Symmetrie der Lösungen (pq-Formel) wider:

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

$$0 = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$$ Finde x!

Idee (Galois): Solche Gleichungen erfüllen Symmetrien.

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von

Symmetrien von Gleichungen.

$$0 = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t \qquad \text{Finde } x!$$

Idee (Galois): Solche Gleichungen erfüllen Symmetrien.

Ab Grad 5 gibt es Gleichungen, die Symmetrien erfüllen, die unmöglich mit Wurzelausdrücken vereinbar sind.

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

$0 = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ Finde x!

Idee (Galois): Solche Gleichungen erfüllen Symmetrien.

Ab Grad 5 gibt es Gleichungen, die Symmetrien erfüllen, die unmöglich mit Wurzelausdrücken vereinbar sind.

Es gibt keine Verallgemeinerung der pq-Formel auf Grade größer gleich 5!

Die Hauptakteure

Vater des Studiums von Symmetrien von Gleichungen.

Gleichungen mit ganzen Koeffizienten (p, q, etc.) sind Hauptobjekte der Zahlentheorie.

In meiner Forschung:

Gleichungen mit ganzen Koeffizienten mit Symmetrien eines bestimmten Typs (GL_2-Typ).

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Die Hauptakteure

Vater der arithmetischen Theorie
der Modulformen.

Die Hauptakteure

Vater der arithmetischen Theorie

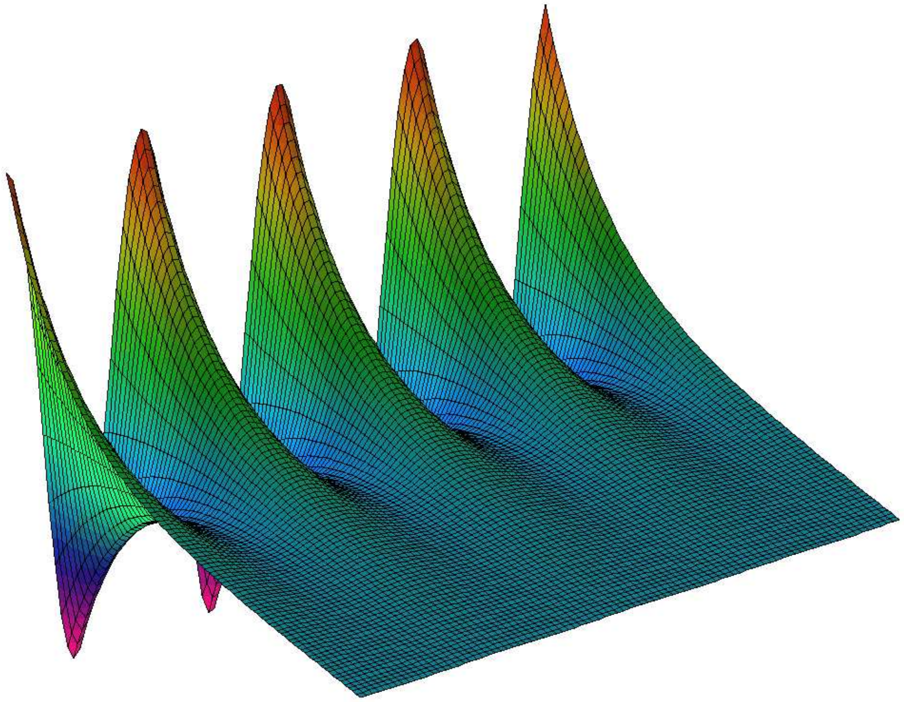
der Modulformen.

Was ist eine Modulform?

Die Hauptakteure

Vater der arithmetischen Theorie der Modulformen.

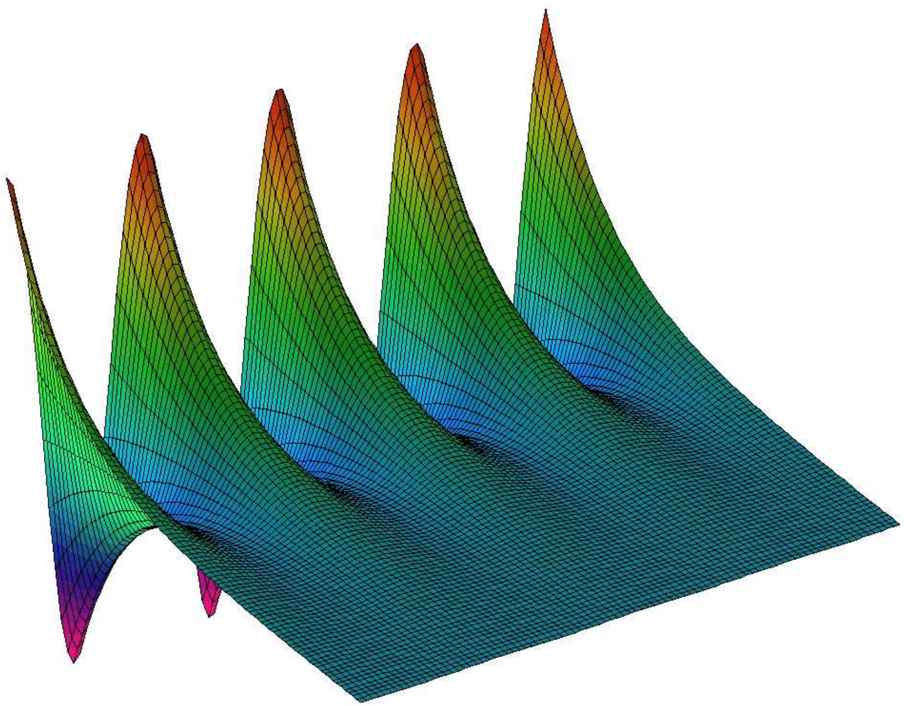
Was ist eine Modulform?



Die Hauptakteure

Vater der arithmetischen Theorie der Modulformen.

Was ist eine Modulform?

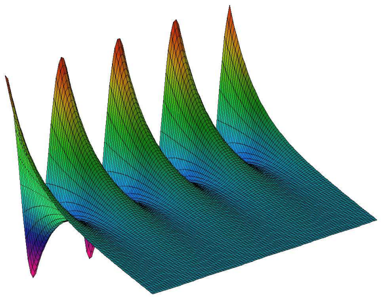


Konstruktion (Hecke):

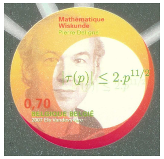
Familie von Symmetrien von Modulformen: Hecke-Operatoren.

Was Hecke uns über Galois lehrt.

Geometrie Zahlentheorie



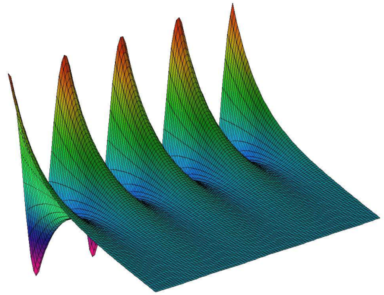
(Hecke-) symmetrische Modulformen



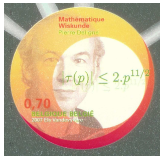
ca. 1970 $\longrightarrow$

Gleichungen mit Symmetrien vom GL_2-Typ

Geometrie | Zahlentheorie



(Hecke-) symmetrische Modulformen



ca. 1970

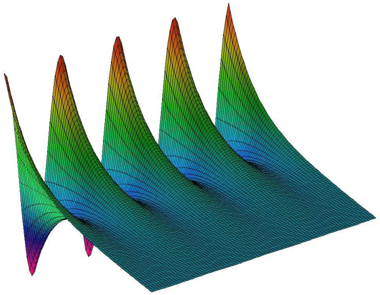
$\longrightarrow$

$\longleftarrow$

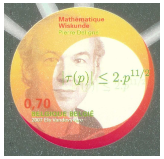
Gleichungen mit Symmetrien vom GL_2-Typ

Umkehrung in 1970er Jahren und 1987 von Serre vermutet.

Geometrie　　　　　　　　Zahlentheorie



(Hecke-)
symmetrische
Modulformen



ca. 1970

$\longrightarrow$

$\longleftarrow$

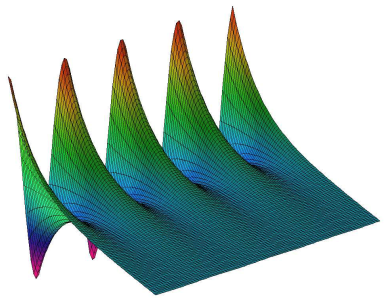
Gleichungen mit
Symmetrien
vom GL_2-Typ

Umkehrung in 1970er Jahren und 1987 von Serre vermutet.

2007 von Khare, Wintenberger und Kisin bewiesen.

Geometrie

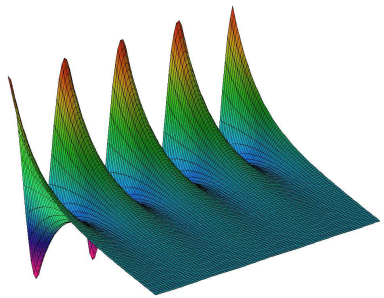
Zahlentheorie



(Hecke-)
symmetrische
Modulformen

Gleichungen mit
Symmetrien
vom GL_2-Typ

Was Hecke uns über Galois lehrt.

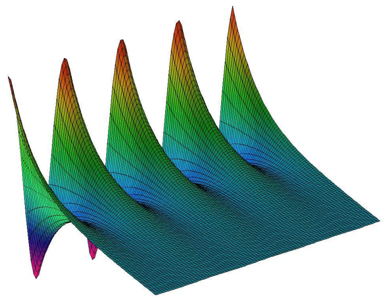
Geometrie	Zahlentheorie
	
(Hecke-) symmetrische Modulformen	Gleichungen mit Symmetrien vom GL_2-Typ

Was Hecke uns über Galois lehrt.

Die Hecke-Symmetrien der Modulform geben Auskunft über zahlentheoretische Eigenschaften der zugehörigen Gleichung!

Meine Forschung

- Untersuchung von <u>Eigenschaften</u> von

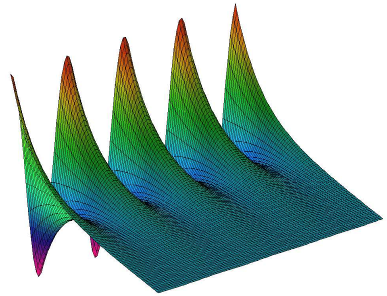


theoretisch  und experimentell  .

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Meine Forschung

- Untersuchung von Eigenschaften von

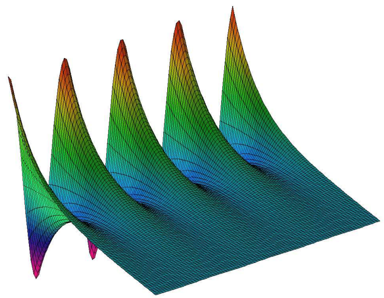


theoretisch  und experimentell  .

- Verallgemeinerung.

Meine Forschung

- Untersuchung von <u>Eigenschaften</u> von

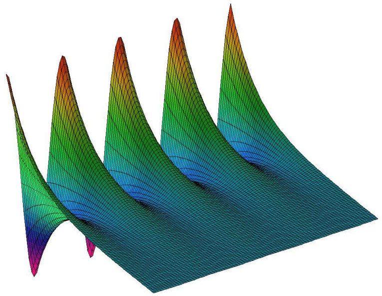


theoretisch  und experimentell  .

- Verallgemeinerung.
- Beweis der <u>Existenz</u> von Gleichungen mit bestimmten Symmetrien.
Inverses Galois-Problem von Hilbert.

Meine Forschung

- Untersuchung von <u>Eigenschaften</u> von



theoretisch  und experimentell  .

- Verallgemeinerung.
- Beweis der <u>Existenz</u> von Gleichungen mit bestimmten Symmetrien.
  Inverses Galois-Problem von Hilbert.

- ...