Zur Asymptotik von Modulformen - Wolken und deren Grenzen

Gabor Wiese

Institut für Experimentelle Mathematik

Universität Duisburg-Essen

23. April 2009

Plan

(I) Arithmetik von Koeffizientenkörpern von Familien von Modulformen. Einführung.

(II) Berechnungen aus der Diplomarbeit von Marcel Mohyla und daraus resultierende Fragen.

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Koeffizientenkörper

Sei $f = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{2\pi i n z}$ eine Neuform (von Primstufe).

Koeffizientenkörper von f: $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(a_n \mid n \in \mathbb{N})$.

Koeffizientenkörper

Sei $f = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{2\pi i n z}$ eine Neuform (von Primstufe).

Koeffizientenkörper von f: $\quad \mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(a_n \mid n \in \mathbb{N})$.

- $\mathbb{Q}_f$ ist ein Zahlkörper.

Koeffizientenkörper

Sei $f = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{2\pi i n z}$ eine Neuform (von Primstufe).

Koeffizientenkörper von f: $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(a_n \mid n \in \mathbb{N})$.

- $\mathbb{Q}_f$ ist ein Zahlkörper.
- Ist das Gewicht von f gleich 2, dann ist $\mathbb{Q}_f$ der Quotientenkörper des Endomorphismenrings einer abelschen Varietät.

Koeffizientenkörper

Sei $f = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{2\pi i n z}$ eine Neuform (von Primstufe).

Koeffizientenkörper von f: $\qquad \mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(a_n \mid n \in \mathbb{N})$.

- $\mathbb{Q}_f$ ist ein Zahlkörper.
- Ist das Gewicht von f gleich 2, dann ist $\mathbb{Q}_f$ der Quotientenkörper des Endomorphismenrings einer abelschen Varietät.

Was weiß man von der Arithmetik von $\mathbb{Q}_f$?

Koeffizientenkörper

Was weiß man von der Arithmetik von $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(a_n \mid n \in \mathbb{N})$?

Sei p Primzahl. *Koeffizientenkörper von f modulo p:*

$$\mathbb{F}_{p,f} = \mathbb{F}_p(\overline{a_n}; n \in \mathbb{N})$$

für eine Wahl von $\overline{\mathbb{Z}} \overset{x \mapsto \overline{x}}{\twoheadrightarrow} \overline{\mathbb{F}}_p$.

Koeffizientenkörper

Was weiß man von der Arithmetik von $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(a_n \mid n \in \mathbb{N})$?

Sei p Primzahl. *Koeffizientenkörper von f modulo p:*

$$\mathbb{F}_{p,f} = \mathbb{F}_p(\overline{a_n}; n \in \mathbb{N})$$

für eine Wahl von $\overline{\mathbb{Z}} \overset{x \mapsto \overline{x}}{\twoheadrightarrow} \overline{\mathbb{F}}_p$.

- Falls p nicht den Index von $\mathbb{Z}[a_n \mid n \in \mathbb{N}]$ im Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}_f$ teilt, dann ist $\mathbb{F}_{p,f}$ der Restklassenkörper von $\mathbb{Q}_f$ für ein Primideal über p.

Koeffizientenkörper

Was weiß man von der Arithmetik von $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(a_n \mid n \in \mathbb{N})$?

Sei p Primzahl. *Koeffizientenkörper von f modulo p:*

$$\mathbb{F}_{p,f} = \mathbb{F}_p(\overline{a_n}; n \in \mathbb{N})$$

für eine Wahl von $\overline{\mathbb{Z}} \overset{x \mapsto \overline{x}}{\twoheadrightarrow} \overline{\mathbb{F}}_p$.

- Falls p nicht den Index von $\mathbb{Z}[a_n \mid n \in \mathbb{N}]$ im Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}_f$ teilt, dann ist $\mathbb{F}_{p,f}$ der Restklassenkörper von $\mathbb{Q}_f$ für ein Primideal über p.
- $\mathbb{F}_{p,f}$ hängt nur von der $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$-Konjugationsklasse $[f]$ von f ab. Wir schreiben: $\mathbb{F}_{p,[f]}$.

Koeffizientenkörper

Was weiß man von der Arithmetik von $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(a_n \mid n \in \mathbb{N})$?

Sei p Primzahl. *Koeffizientenkörper von f modulo p:*

$$\mathbb{F}_{p,f} = \mathbb{F}_p(\overline{a_n}; n \in \mathbb{N})$$

für eine Wahl von $\overline{\mathbb{Z}} \overset{x \mapsto \overline{x}}{\twoheadrightarrow} \overline{\mathbb{F}}_p$.

- Falls p nicht den Index von $\mathbb{Z}[a_n \mid n \in \mathbb{N}]$ im Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}_f$ teilt, dann ist $\mathbb{F}_{p,f}$ der Restklassenkörper von $\mathbb{Q}_f$ für ein Primideal über p.
- $\mathbb{F}_{p,f}$ hängt nur von der $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$-Konjugationsklasse $[f]$ von f ab. Wir schreiben: $\mathbb{F}_{p,[f]}$.

Warum ist $\mathbb{F}_{p,[f]}$ wichtig?

Koeffizientenkörper mod p

Warum ist $\mathbb{F}_{p,[f]}$ wichtig?

- Shimura/Deligne: Es gibt eine ungerade Galois-Darstellung

  $$\rho_{[f]} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p,[f]}),$$

  deren Arithmetik in $[f]$ ”gespeichert“ ist.

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Koeffizientenkörper mod p

Warum ist $\mathbb{F}_{p,[f]}$ wichtig?

- Ribet: Für fast alle p gibt es einen total imaginären Zahlkörper $K_{f,p}$, dessen Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(K_{f,p}/\mathbb{Q})$ gleich $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p,[f]})$ or $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p,[f]})$ ist.

  Die Arithmetik von $K_{f,p}$ ist in $[f]$ ”gespeichert“.

Koeffizientenkörper mod p

Warum ist $\mathbb{F}_{p,[f]}$ wichtig?

- Ribet: Für fast alle p gibt es einen total imaginären Zahlkörper $K_{f,p}$, dessen Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(K_{f,p}/\mathbb{Q})$ gleich $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p,[f]})$ or $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p,[f]})$ ist.

  Die Arithmetik von $K_{f,p}$ ist in $[f]$ ”gespeichert“.

- Serre’s Modularitätsvermutung (Theorem von Khare, Wintenberger, Kisin):

  Jeder total imaginäre Zahlkörper mit Galois-Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F})$ oder $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F})$ mit einem endlichen Körper $\mathbb{F}$ entsteht auf diese Weise.

Koeffizientenkörper mod p

Was wissen wir von $\mathbb{Q}_f$ und $\mathbb{F}_{p,[f]}$?

- In konkreten Fällen: Berechnen von $\mathbb{Q}_f$ und $\mathbb{F}_{p,[f]}$ ist einfach.

Koeffizientenkörper mod p

Was wissen wir von $\mathbb{Q}_f$ und $\mathbb{F}_{p,[f]}$?

- In konkreten Fällen: Berechnen von $\mathbb{Q}_f$ und $\mathbb{F}_{p,[f]}$ ist einfach.
- Jede Neuform hat eine Stufe $N \in \mathbb{N}$ und ein Gewicht $k \in \mathbb{N}$.
- Kennt man aber nur Stufe und Gewicht, dann weiß man nicht viel über $\mathbb{Q}_f$ und $\mathbb{F}_{p,[f]}$.

Koeffizientenkörper mod p

Was wissen wir von $\mathbb{Q}_f$ und $\mathbb{F}_{p,[f]}$?

- In konkreten Fällen: Berechnen von $\mathbb{Q}_f$ und $\mathbb{F}_{p,[f]}$ ist einfach.
- Jede Neuform hat eine Stufe $N \in \mathbb{N}$ und ein Gewicht $k \in \mathbb{N}$.
- Kennt man aber nur Stufe und Gewicht, dann weiß man nicht viel über $\mathbb{Q}_f$ und $\mathbb{F}_{p,[f]}$.

Kann man etwas "Asymptotisches" für variierendes f sagen?

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Koeffizientenkörper mod p

Kann man etwas "Asymptotisches" für variierendes f sagen?

Wir werden folgende Punkte betrachten:

- Summe der Grade $[\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$ für alle $[f]$ in gegebener Stufe und Gewicht.

  Ausartung der Mod-p-Hecke-Algebren.

Koeffizientenkörper mod p

Kann man etwas ”Asymptotisches“ für variierendes f sagen?

Wir werden folgende Punkte betrachten:

- Summe der Grade $[\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$ für alle $[f]$ in gegebener Stufe und Gewicht.

  Ausartung der Mod-p-Hecke-Algebren.

- Mittlerer Grad $[\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$ über alle $[f]$ in gegebener Stufe und Gewicht.

Koeffizientenkörper mod p

Kann man etwas ”Asymptotisches“ für variierendes f sagen?

Wir werden folgende Punkte betrachten:

- Summe der Grade $[\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$ für alle $[f]$ in gegebener Stufe und Gewicht.

  Ausartung der Mod-p-Hecke-Algebren.
- Mittlerer Grad $[\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$ über alle $[f]$ in gegebener Stufe und Gewicht.
- Maximaler Grad $[\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$ unter allen $[f]$ in gegebener Stufe und Gewicht.

Ausartung mod p

Wir betrachten Primstufe N und ein Gewicht k.

Wir definieren

$$\dim_k(N) = (\text{Anzahl Neuformen in Stufe } N \text{ und Gewicht } k).$$

Ausartung mod p

Wir betrachten Primstufe N und ein Gewicht k.

Wir definieren

$\dim_k(N) = ($Anzahl Neuformen in Stufe N und Gewicht $k)$.

Summe der Restklassengrade

$$\deg_k^{(p)}(N) = \sum_{[f]} [\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p],$$

wobei $[f]$ die $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$-Konjugationsklassen der Neuformen in Stufe N und Gewicht k durchläuft.

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Ausartung mod p

Theorem. $\dim_k(N) = \deg_k^{(p)}(N) \overset{\text{def}}{=} \sum_{[f]} [\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$

(die Mod-p-Hecke-Algebra ist nicht ausgeartet) $\Leftrightarrow$

Ausartung mod p

Theorem. $\dim_k(N) = \deg_k^{(p)}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{[f]} [\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$

(die Mod-p-Hecke-Algebra ist nicht ausgeartet) $\Leftrightarrow$

- es gibt keine Kongruenz modulo p zwischen zwei Neuformen von Stufe N und Gewicht k <u>und</u>

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Ausartung mod p

Theorem. $\dim_k(N) = \deg_k^{(p)}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{[f]} [\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$

(die Mod-p-Hecke-Algebra ist nicht ausgeartet) $\Leftrightarrow$

- es gibt keine Kongruenz modulo p zwischen zwei Neuformen von Stufe N und Gewicht k <u>und</u>
- die Koeffizientenkörper $\mathbb{Q}_f$ sind bei p unverzweigt für alle Neuformen f in Stufe N und Gewicht k <u>und</u>

Ausartung mod p

Theorem. $\dim_k(N) = \deg_k^{(p)}(N) \overset{\text{def}}{=} \sum_{[f]} [\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$

(die Mod-p-Hecke-Algebra ist nicht ausgeartet) $\Leftrightarrow$

- es gibt keine Kongruenz modulo p zwischen zwei Neuformen von Stufe N und Gewicht k <u>und</u>
- die Koeffizientenkörper $\mathbb{Q}_f$ sind bei p unverzweigt für alle Neuformen f in Stufe N und Gewicht k <u>und</u>
- $p \nmid$ Index $\mathbb{Z}_f = \mathbb{Z}[a_n(f) \mid n \in \mathbb{N}]$ in den ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}_f$ für alle Neuformen f in Stufe N und Gewicht k.

Ausartung mod p

Theorem. $\dim_k(N) = \deg_k^{(p)}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{[f]} [\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$

(die Mod-p-Hecke-Algebra ist nicht ausgeartet) $\Leftrightarrow$

- es gibt keine Kongruenz modulo p zwischen zwei Neuformen von Stufe N und Gewicht k <u>und</u>
- die Koeffizientenkörper $\mathbb{Q}_f$ sind bei p unverzweigt für alle Neuformen f in Stufe N und Gewicht k <u>und</u>
- $p \nmid$ Index $\mathbb{Z}_f = \mathbb{Z}[a_n(f) \mid n \in \mathbb{N}]$ in den ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}_f$ für alle Neuformen f in Stufe N und Gewicht k.

Man könnte vermuten, dass strikte Ungleichheit $\dim_k(N) > \deg_k^{(p)}(N)$ ein seltenes Phänomen ist.

Ist das wahr?

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

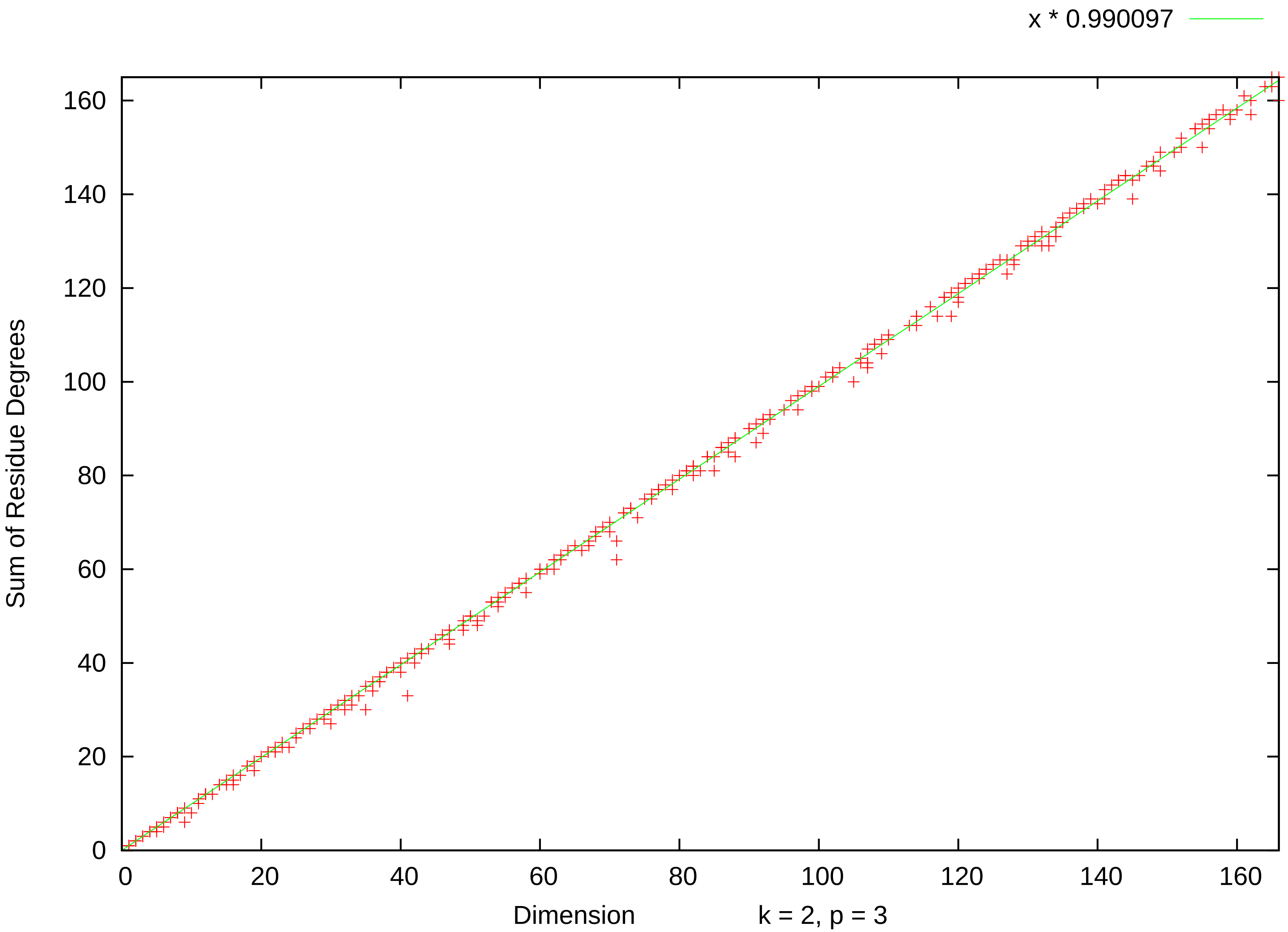
Ausartung mod p

Wir fixieren eine Primzahl p und ein Gewicht k.

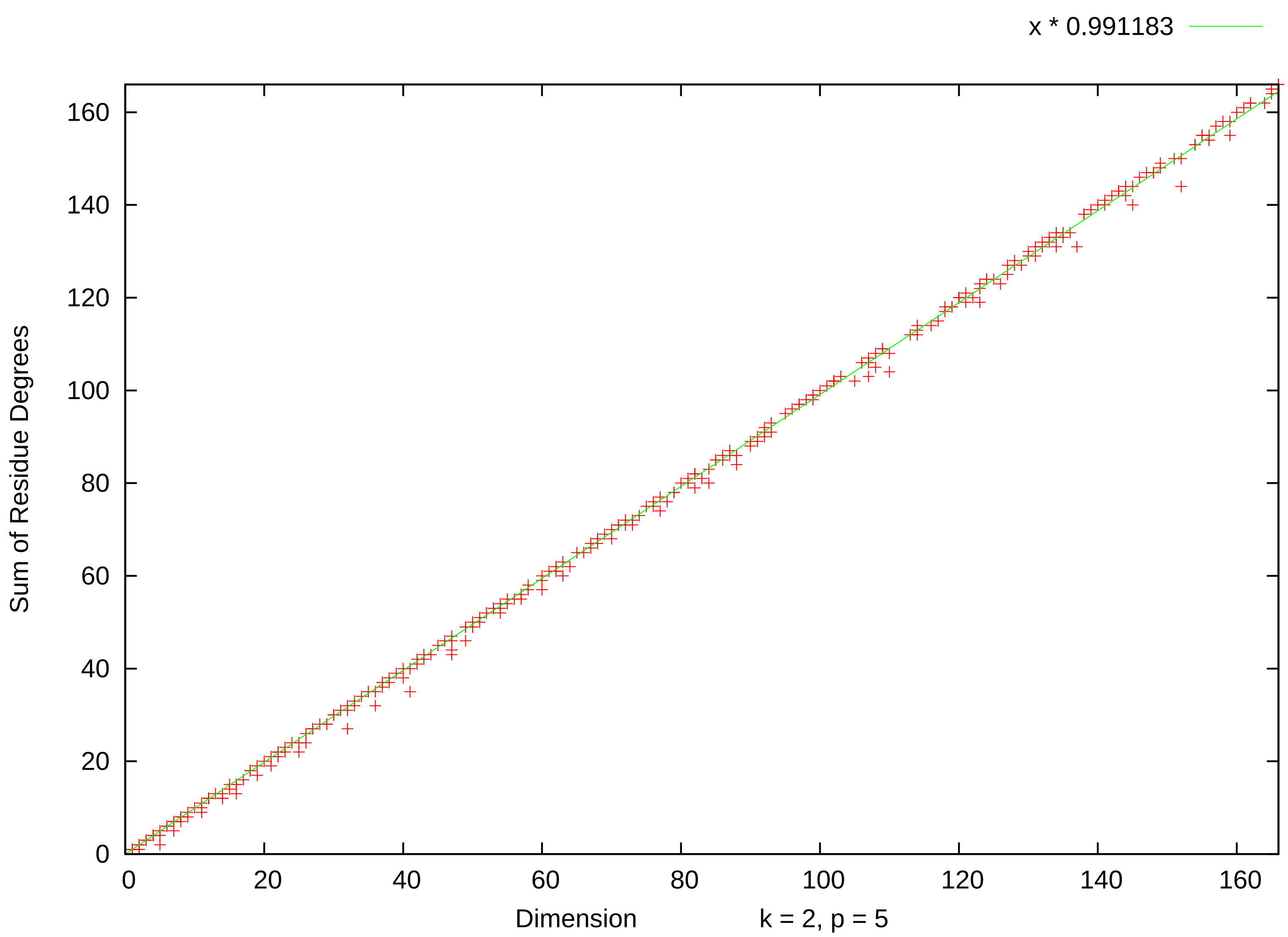
Wir zeichnen $\deg_k^{(p)}(N)$ als Funktion von $\dim_k(N)$ für alle Primstufen $N \leq 2000$ (für $k = 2$).

Zunächst für ungerades p.

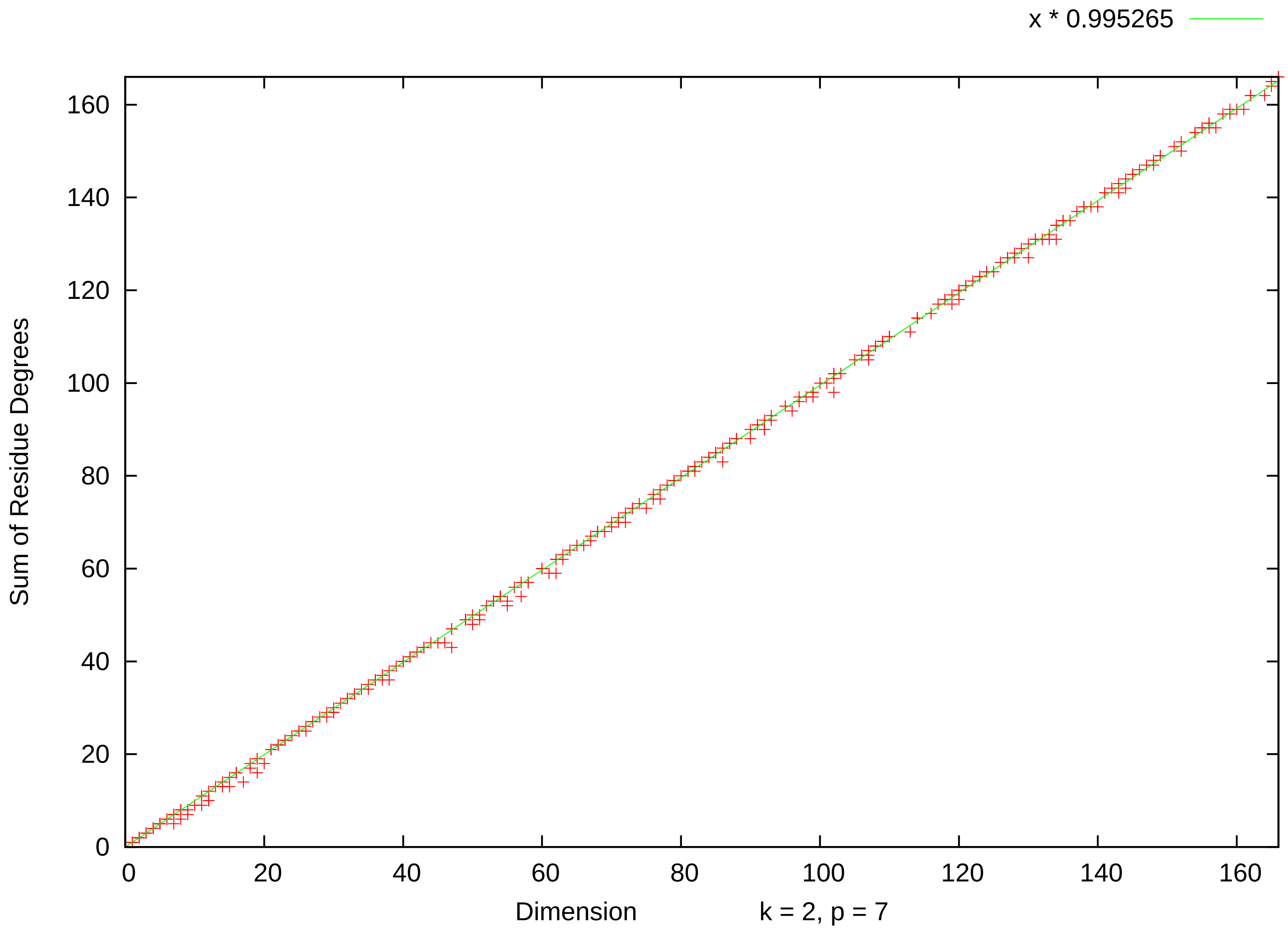
Ausartung mod p



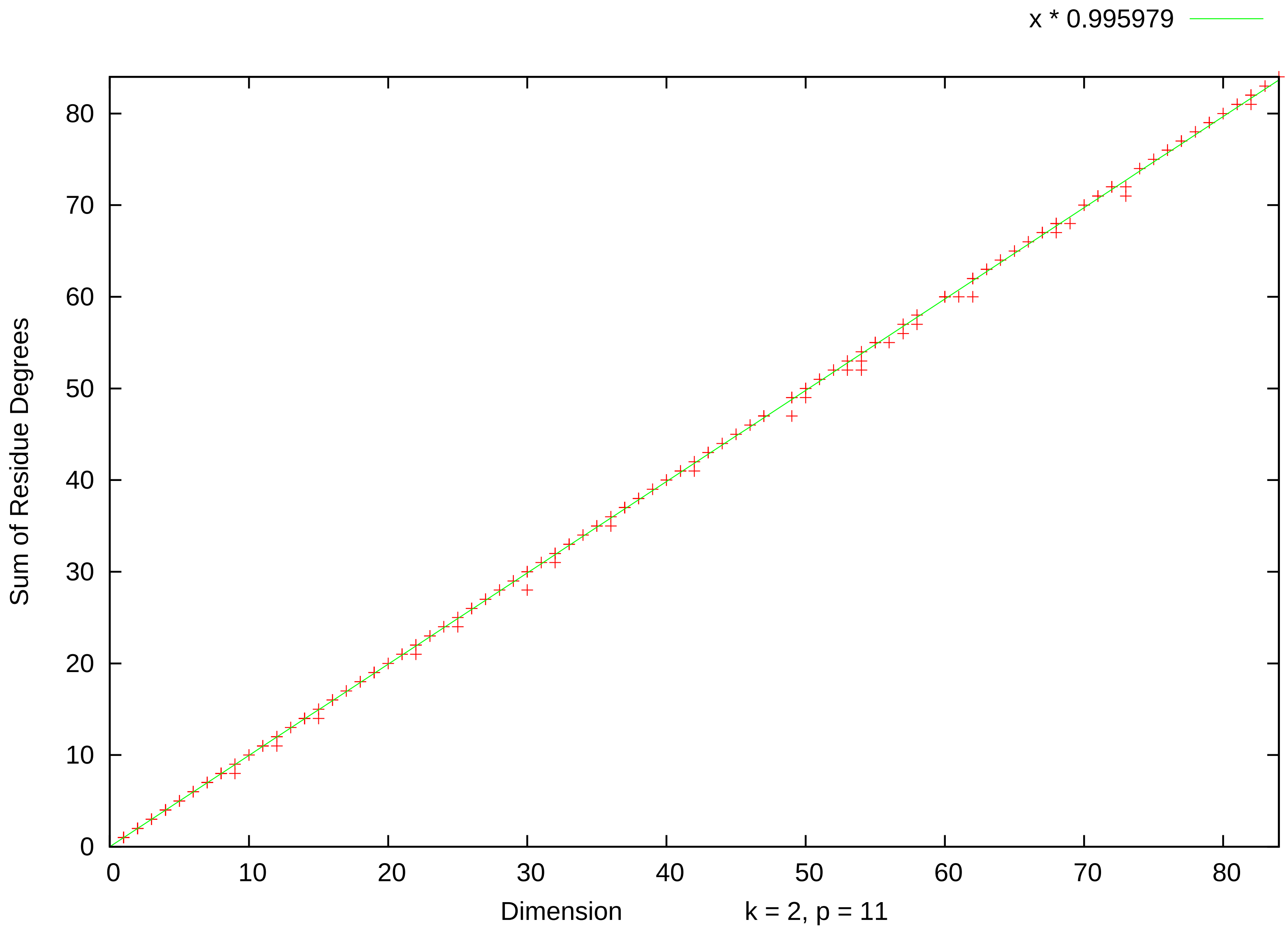
Ausartung mod p



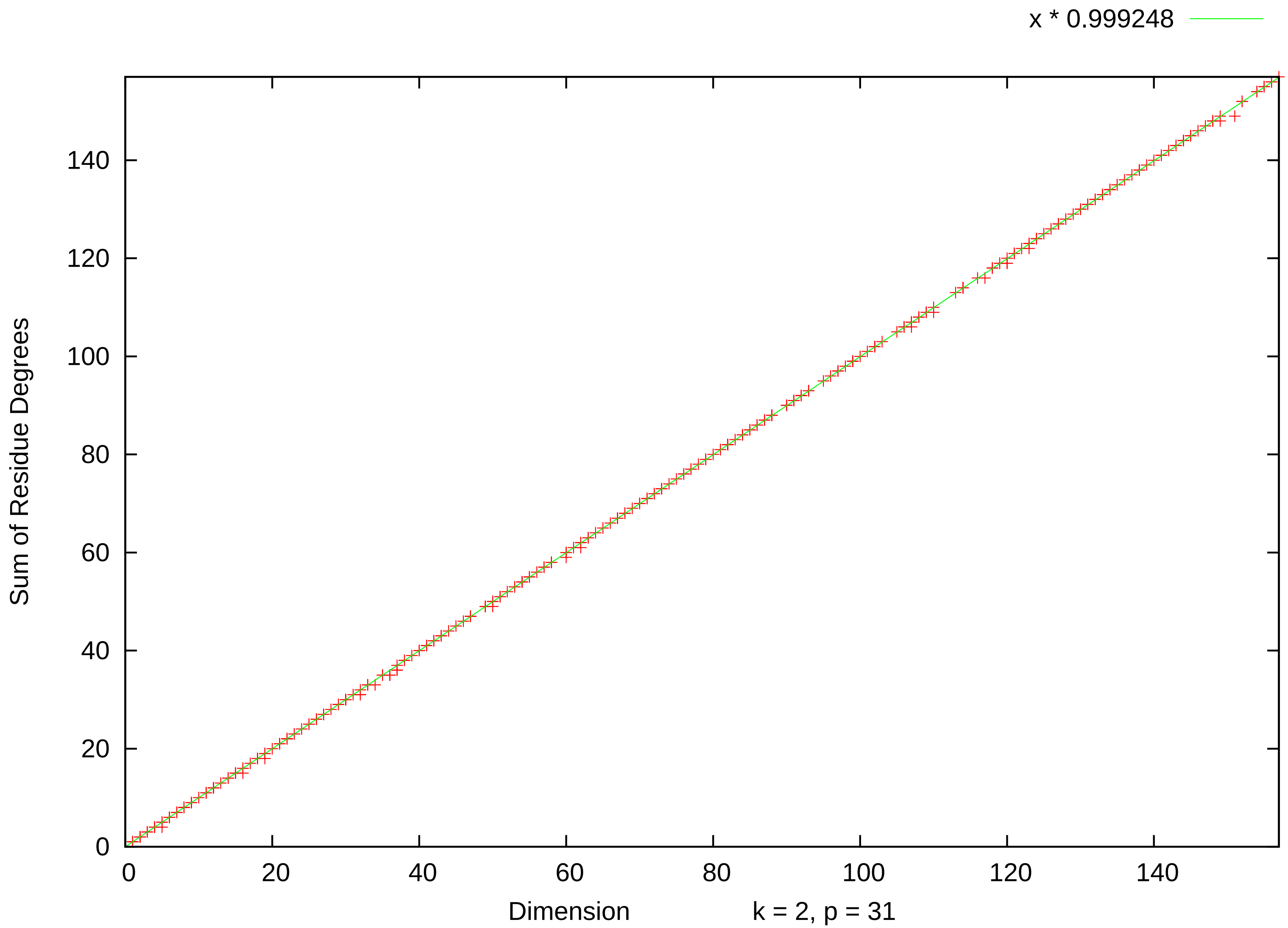
Ausartung mod p



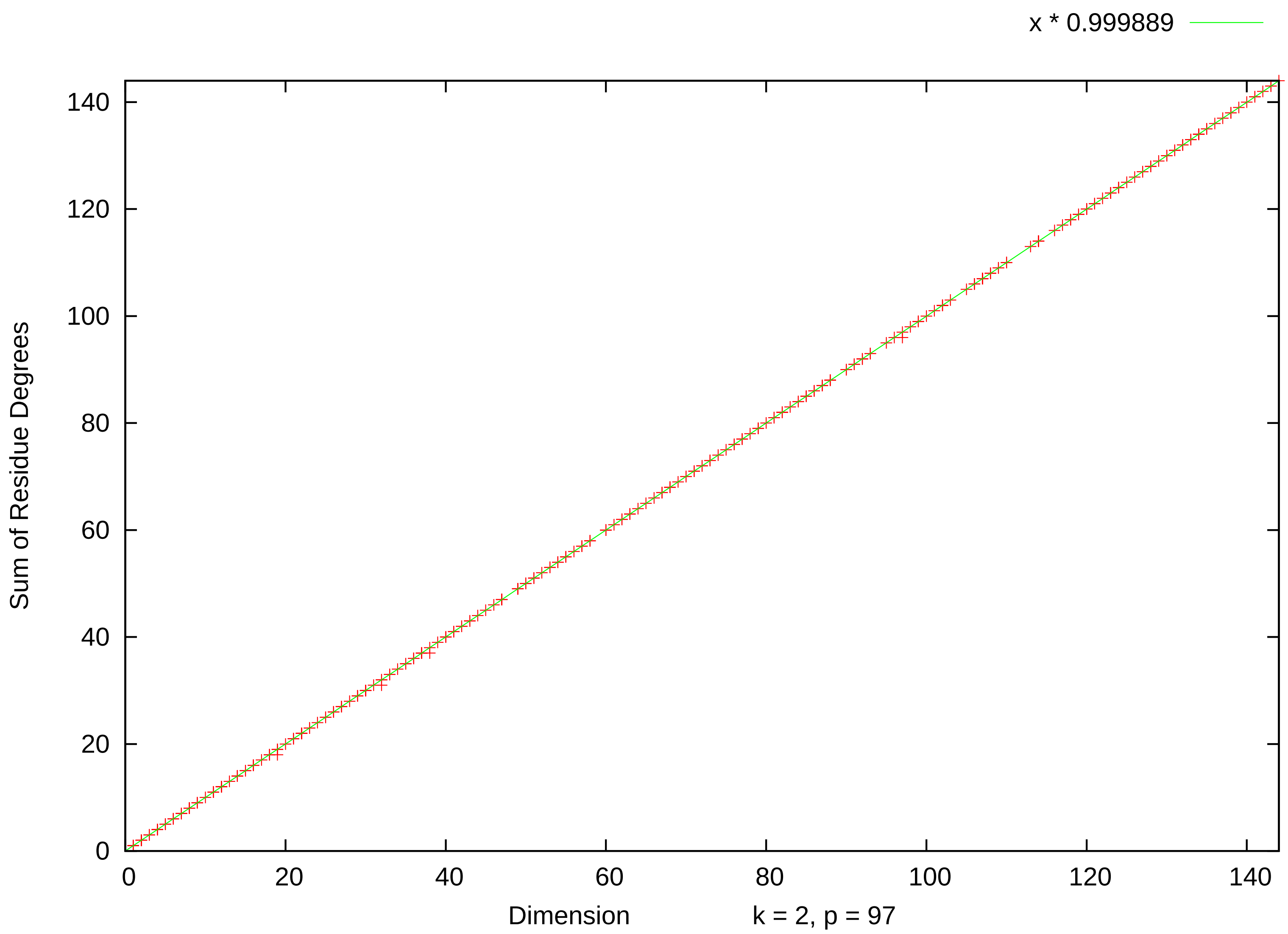
Ausartung mod p



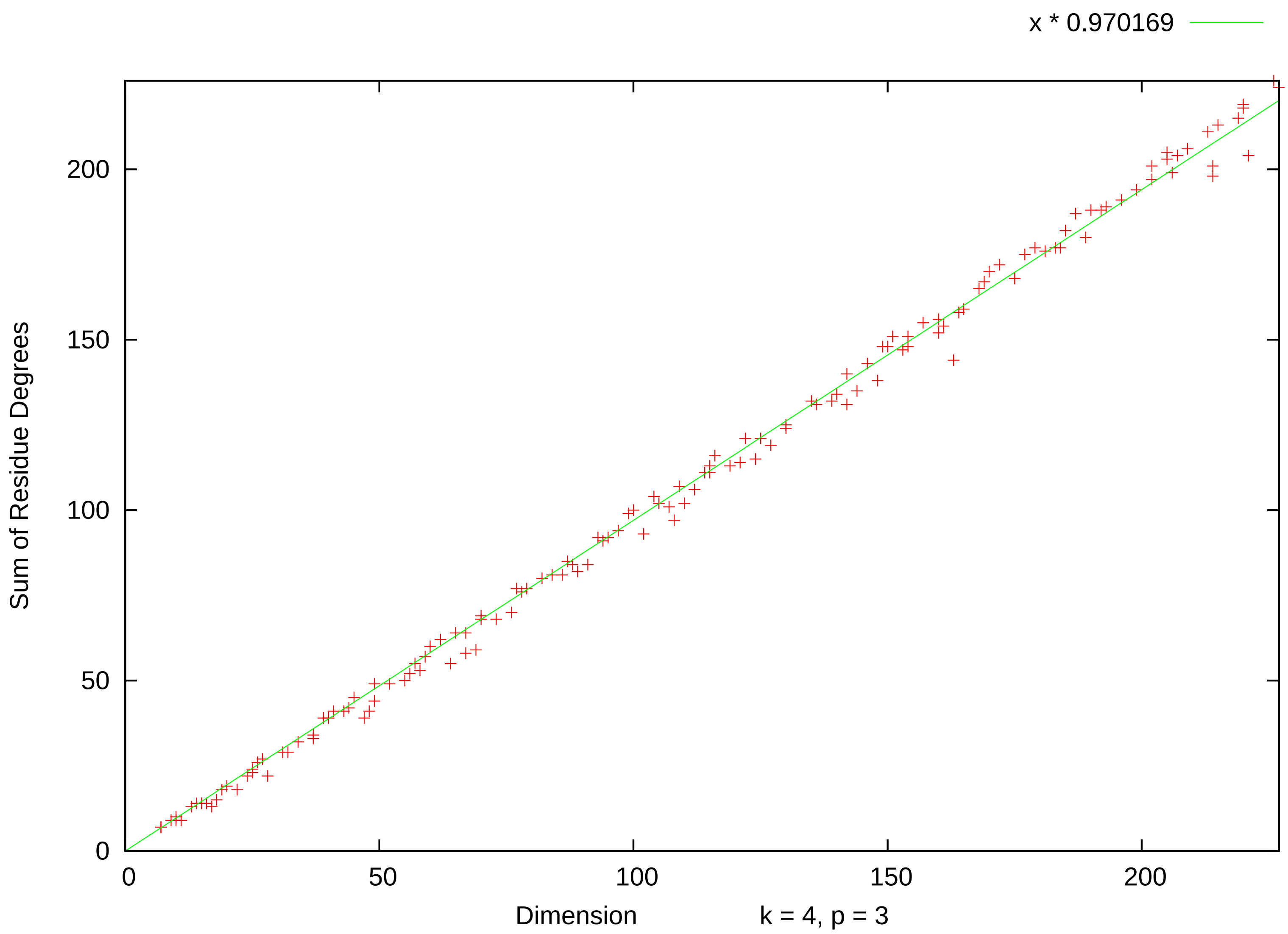
Ausartung mod p



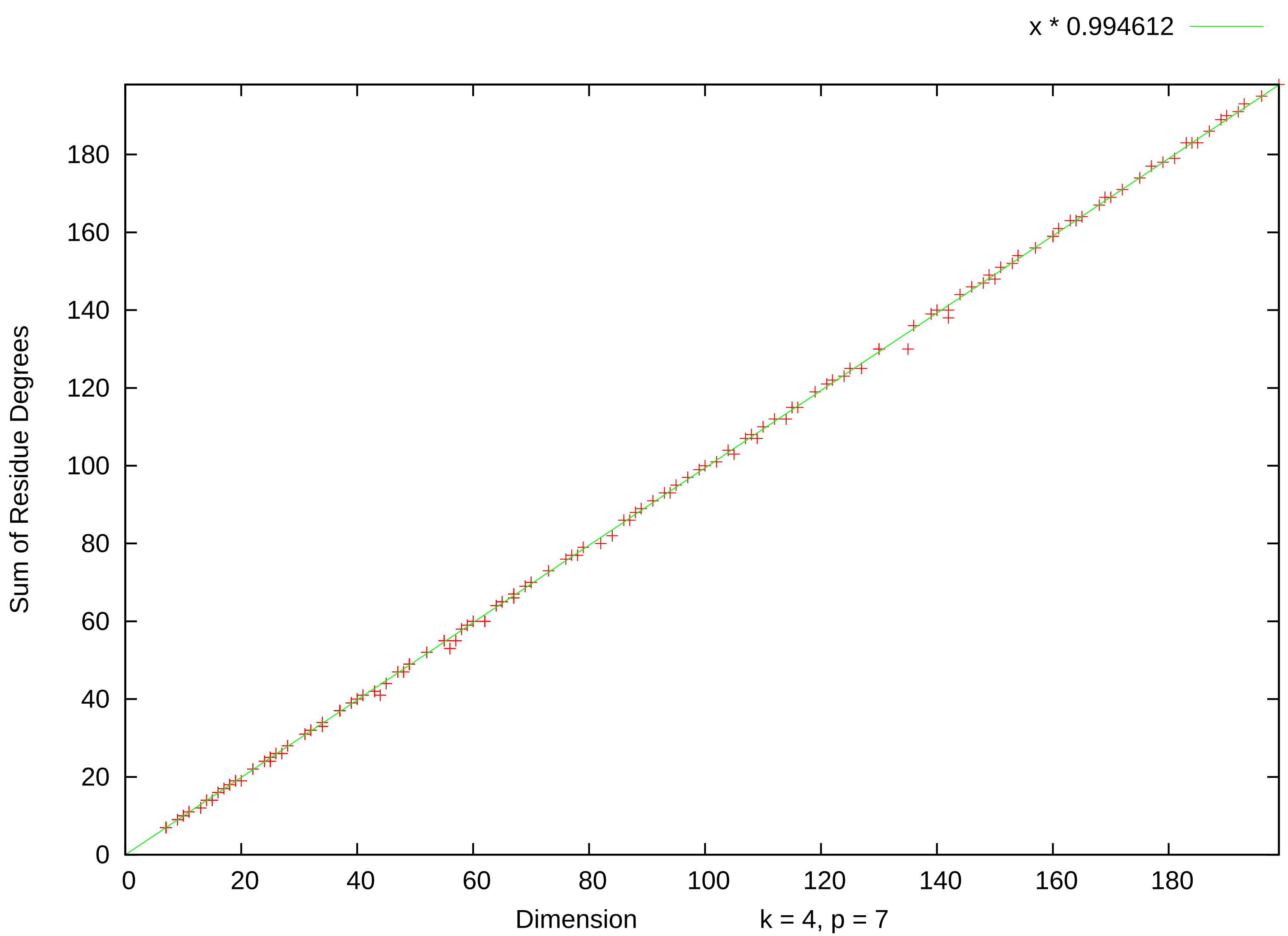
Ausartung mod p



Ausartung mod p



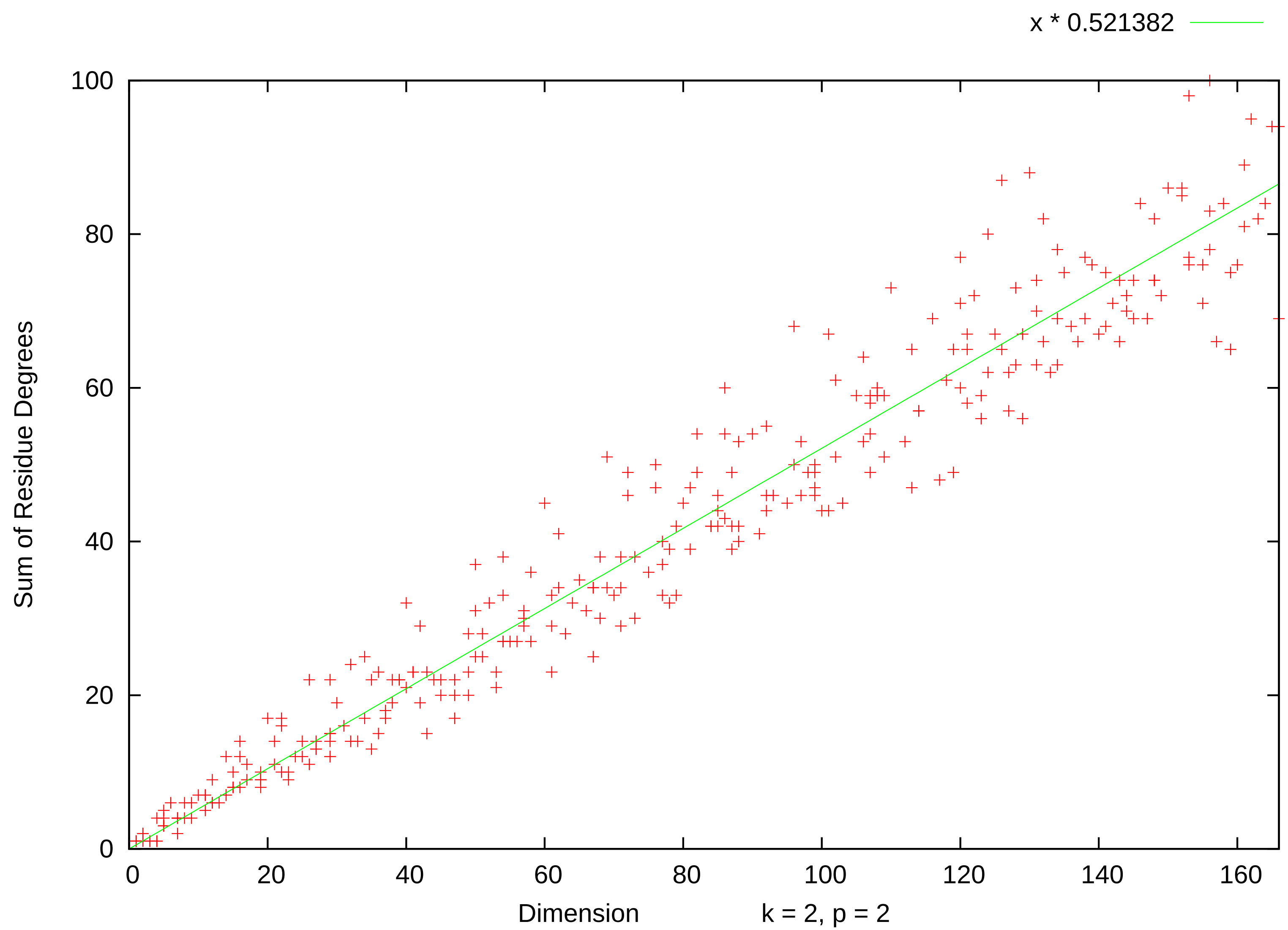
Ausartung mod p



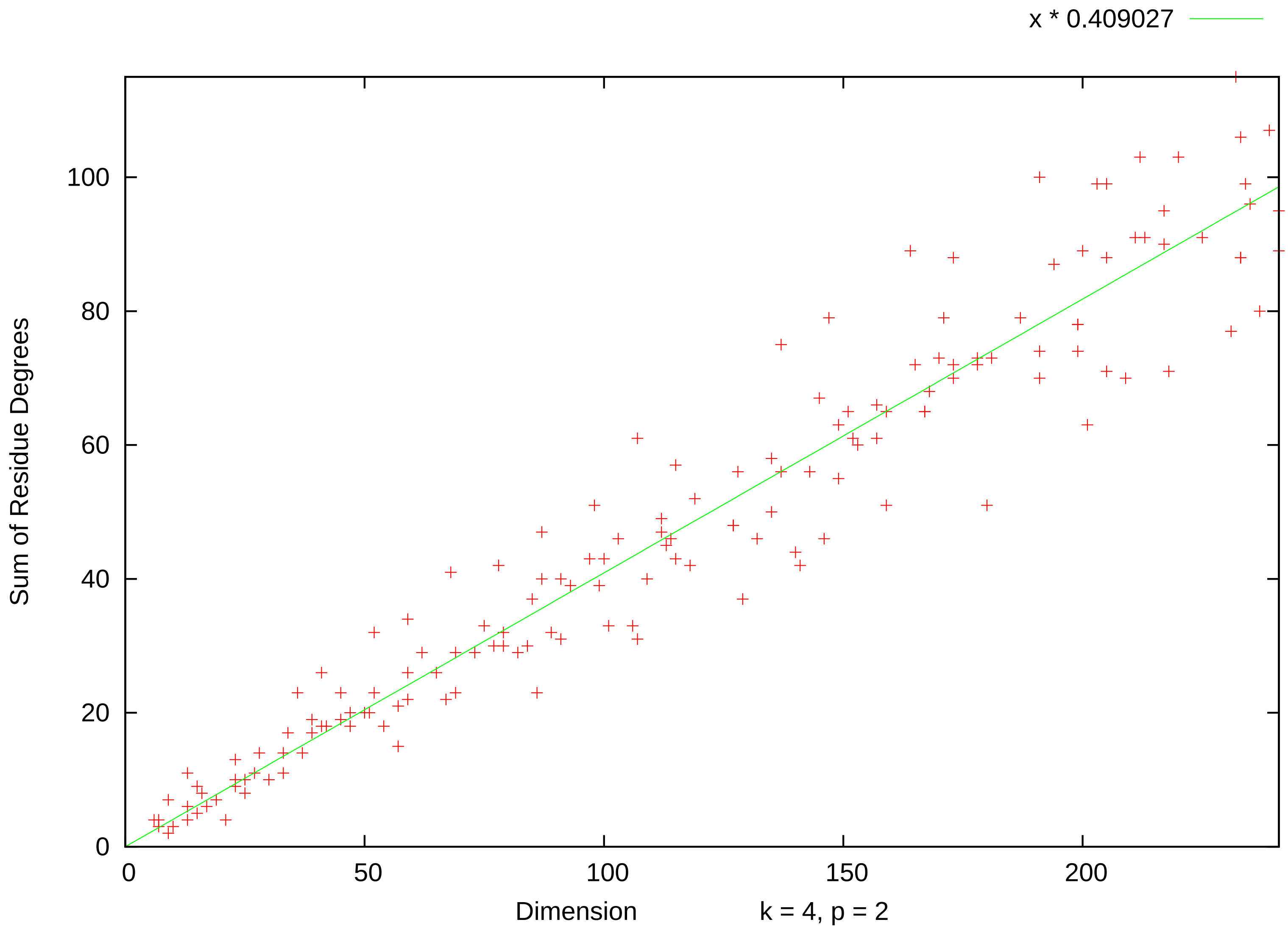
Ausartung mod p

Jetzt $p = 2$.

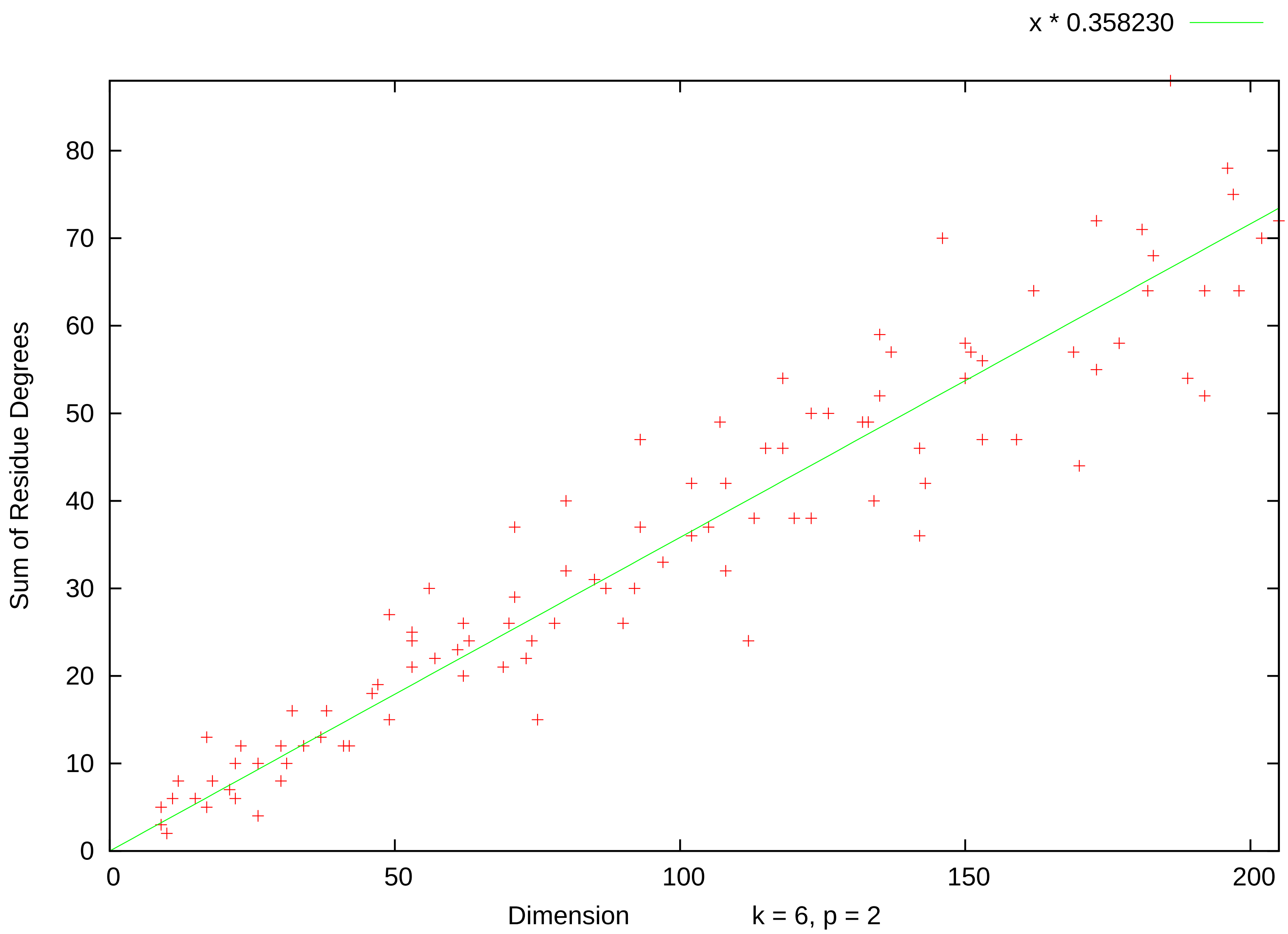
Ausartung mod p



Ausartung mod p



Ausartung mod p



Ausartung mod p

Frage: *Fixiere eine Primzahl* $p > 2$ *und ein Gewicht* $k \geq 2$*.*
Gibt es $0 < \alpha \leq 1$ *und* $C > 0$*, so dass*

$$\deg_k^{(p)}(N) \geq \alpha \dim_k(N) - C \quad ?$$

Ausartung mod p

Frage: *Fixiere eine Primzahl* $p > 2$ *und ein Gewicht* $k \geq 2$*.*

Gibt es $0 < \alpha \leq 1$ *und* $C > 0$*, so dass*

$$\deg_k^{(p)}(N) \geq \alpha \dim_k(N) - C \quad ?$$

Frage: *Fixiere ein Gewicht* $k \geq 2$*.*

Gibt es $0 < \alpha \leq \beta < 1$ *und* $C, D > 0$*, so dass*

$$\beta \dim_k(N) + D \geq \deg_k^{(2)}(N) \geq \alpha \dim_k(N) - C \quad ?$$

Grade von Koeffizientenkörpern

Theorem (Serre). *Nehmen an:* $N_m + k_m \to \infty$ *für* $m \to \infty$.

Dann ist die Menge

$$\{[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}] \mid f \text{ Neuform von Stufe } N_m, \text{ Gewicht } k_m \text{ ein } m\}$$

unbeschränkt.

Grade von Koeffizientenkörpern

Theorem (Serre). *Nehmen an: $N_m + k_m \to \infty$ für $m \to \infty$.*

Dann ist die Menge

$$\{[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}] \mid f \text{ Neuform von Stufe } N_m, \text{ Gewicht } k_m \text{ ein } m\}$$

unbeschränkt.

Im Allgemeinen weiß ich nicht, ob die Menge

$$\{[\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p] \mid f \text{ Neuform von Stufe } N_m, \text{ Gewicht } k_m \text{ ein } m\}$$

unbeschränkt ist. Die Fälle, wenn N_m eine große Primpotenz enthalten, können mittels Verzweigung behandelt werden.

Grade von Koeffizientenkörpern

Theorem (Serre). *Nehmen an: $N_m + k_m \to \infty$ für $m \to \infty$. Dann ist die Menge*

$$\{[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}] \mid f \text{ Neuform von Stufe } N_m, \text{ Gewicht } k_m \text{ ein } m\}$$

unbeschränkt.

Im Allgemeinen weiß ich nicht, ob die Menge

$$\{[\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p] \mid f \text{ Neuform von Stufe } N_m, \text{ Gewicht } k_m \text{ ein } m\}$$

unbeschränkt ist. Die Fälle, wenn N_m eine große Primpotenz enthalten, können mittels Verzweigung behandelt werden.

Wie verhalten sich die $[\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$, wenn k fixiert ist und N die Primzahlen durchläuft?

Grade von Koeffizientenkörpern

Wir definieren:

$$\max_k^{(p)}(N) := \max_{[f]}[\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$$

maximaler Grad der Koeffizientenkörper mod p.

Hierbei durchläuft $[f]$ die $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$-Konjugiertenklassen von Neuformen in Stufe N und Gewicht k.

Grade von Koeffizientenkörpern

Wir definieren:

$$\max_k^{(p)}(N) := \max_{[f]}[\mathbb{F}_{p,[f]} : \mathbb{F}_p]$$

maximaler Grad der Koeffizientenkörper mod p.

Hierbei durchläuft $[f]$ die $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$-Konjugiertenklassen von Neuformen in Stufe N und Gewicht k.

Kann $\max_k^{(p)}(N)$ durch Funktionen in $\dim_k(N)$ beschränkt werden?

Grade von Koeffizientenkörpern

Fixiere p und $k = 2$.

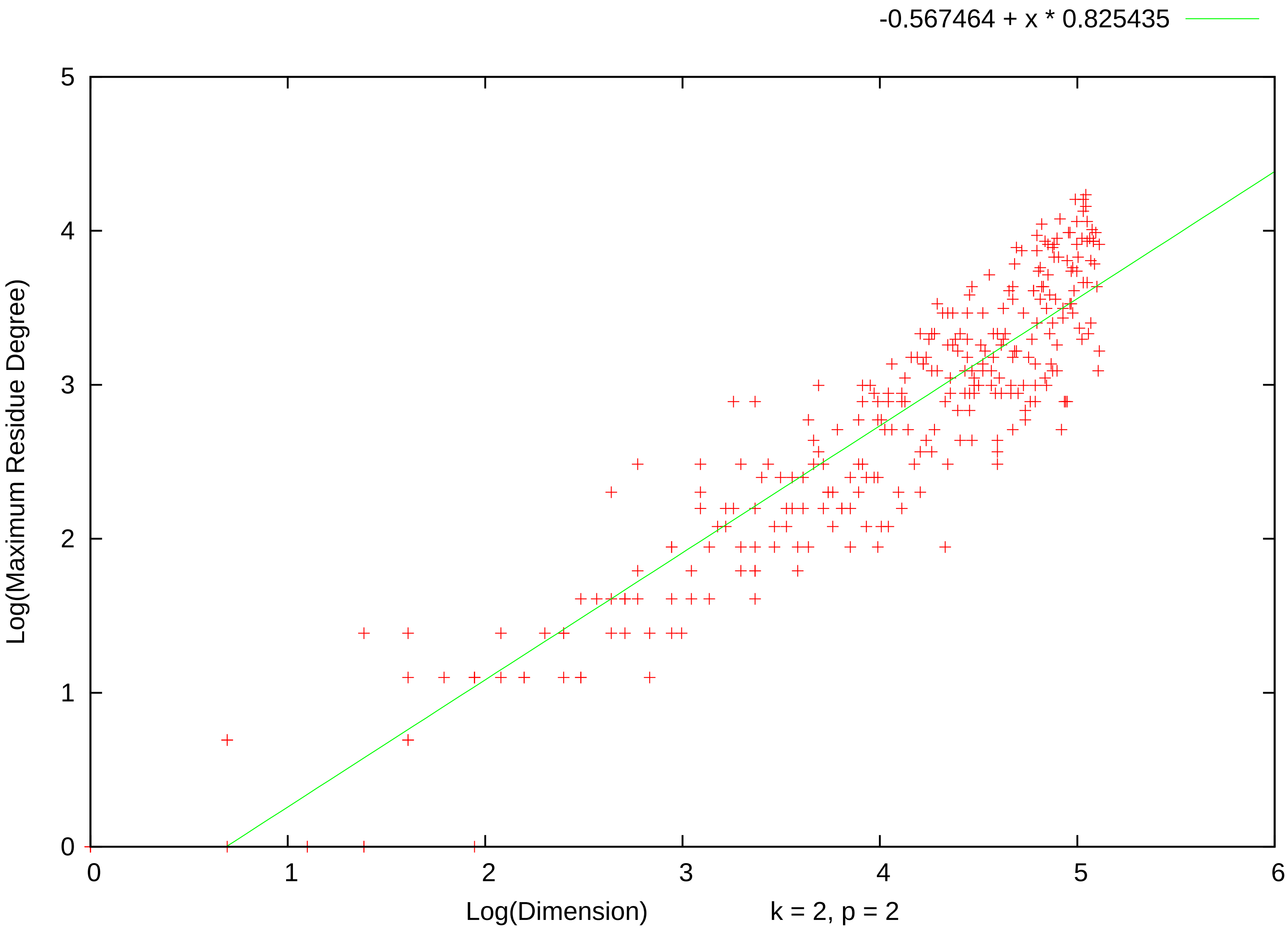
Wir raten eine Abhängigkeit der Form

$$\max_k^{(p)}(N) \sim C\big(\dim_k(N)\big)^{\alpha}.$$

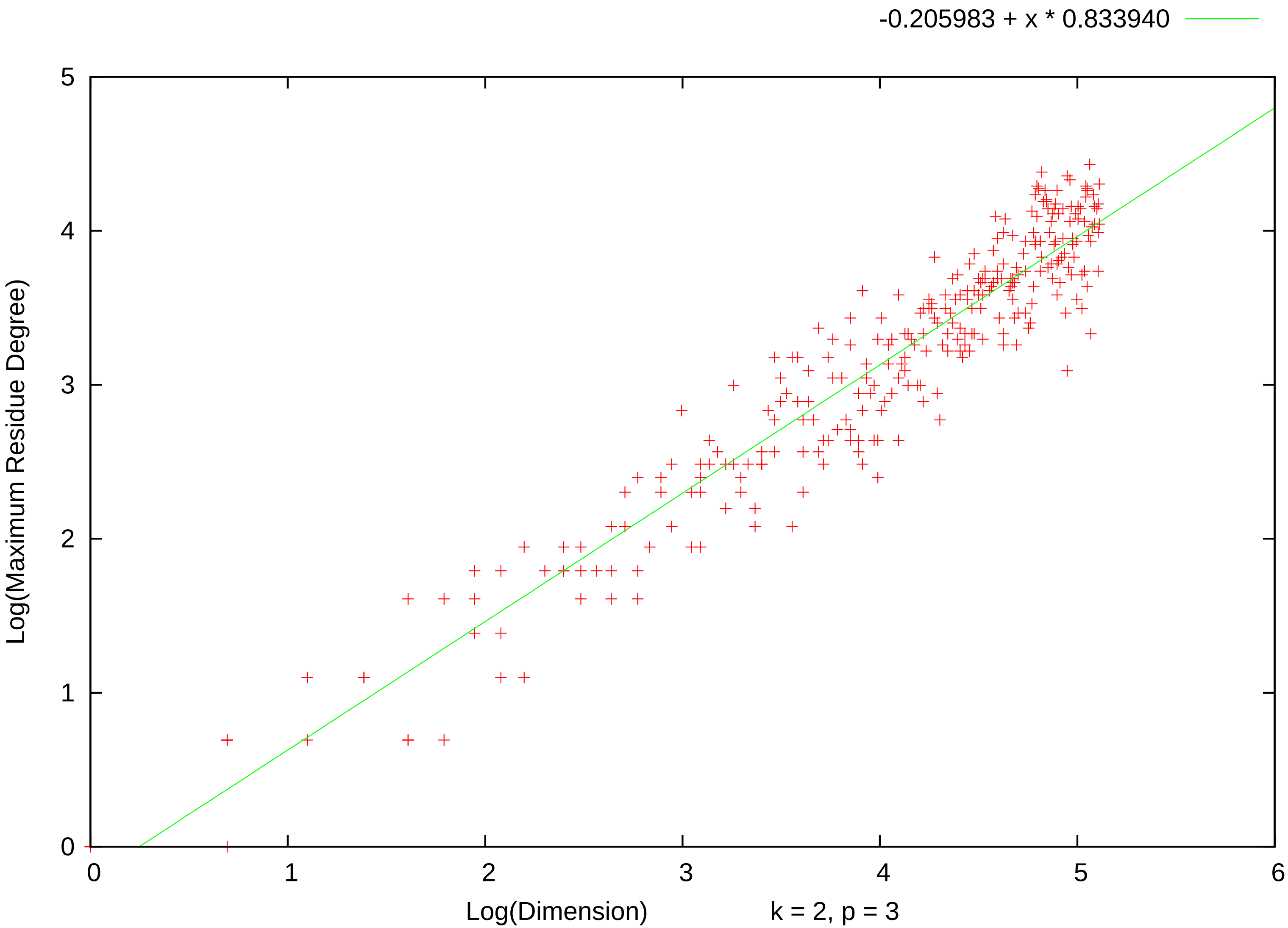
Wir zeichnen $\log(\max_k^{(p)}(N))$ als Funktion von $\log(\dim_k(N))$ für die Primzahlen $N \leq 2000$.

Bemerkung. Nimmt man statt des maximal Grades den mittleren Grad, dann sehen die Graphen ganz ähnlich aus.

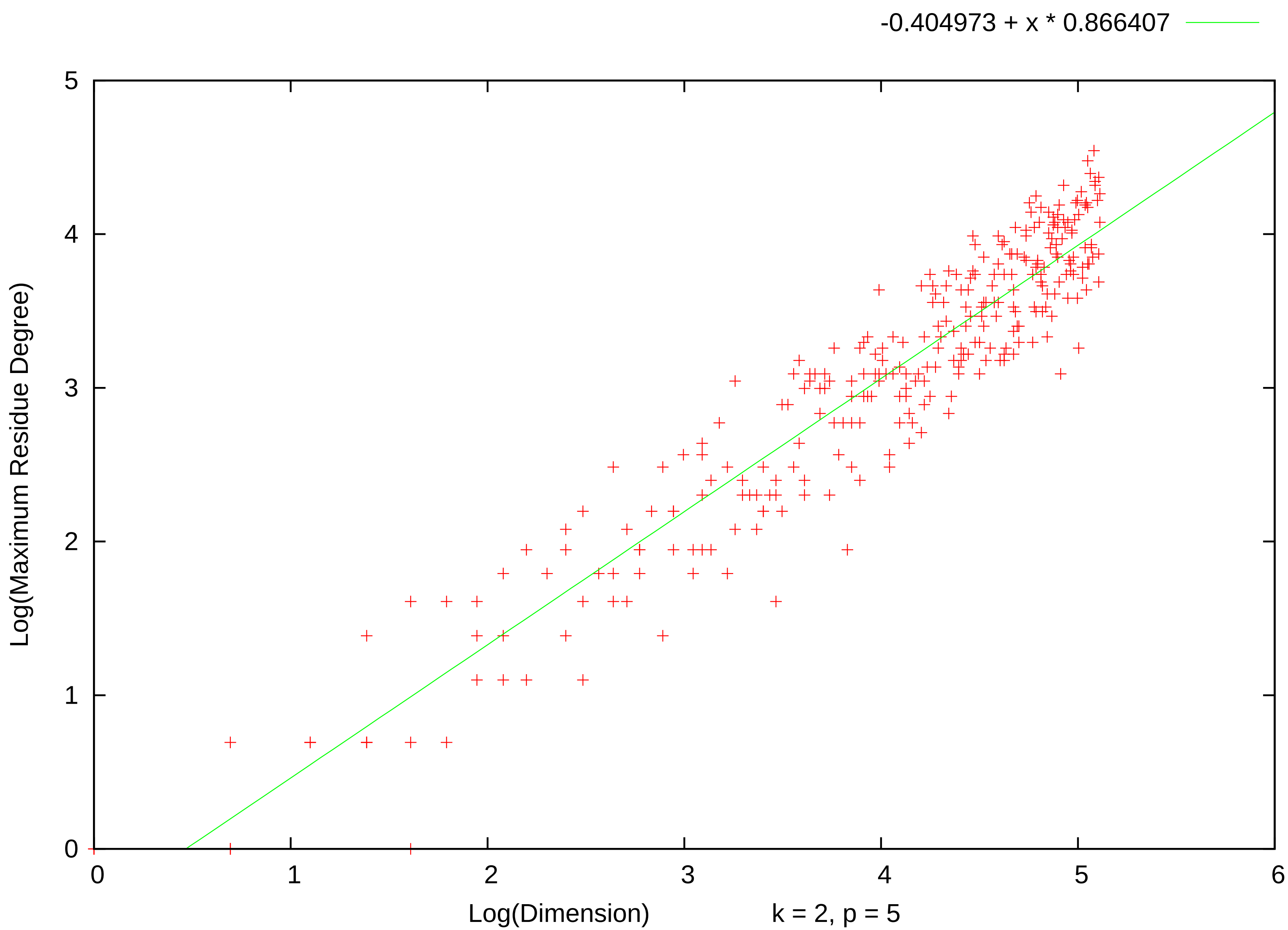
Grade von Koeffizientenkörpern



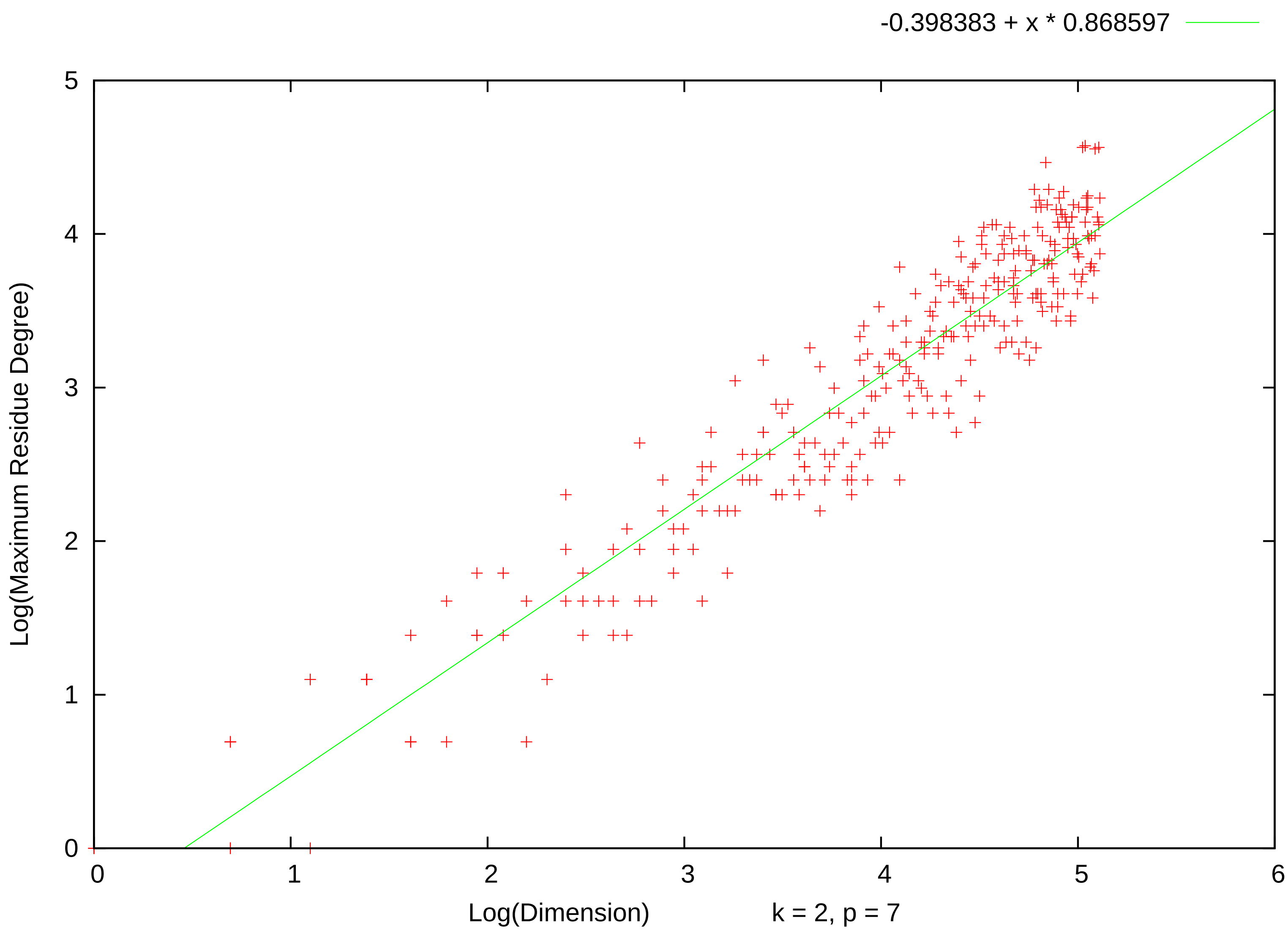
Grade von Koeffizientenkörpern



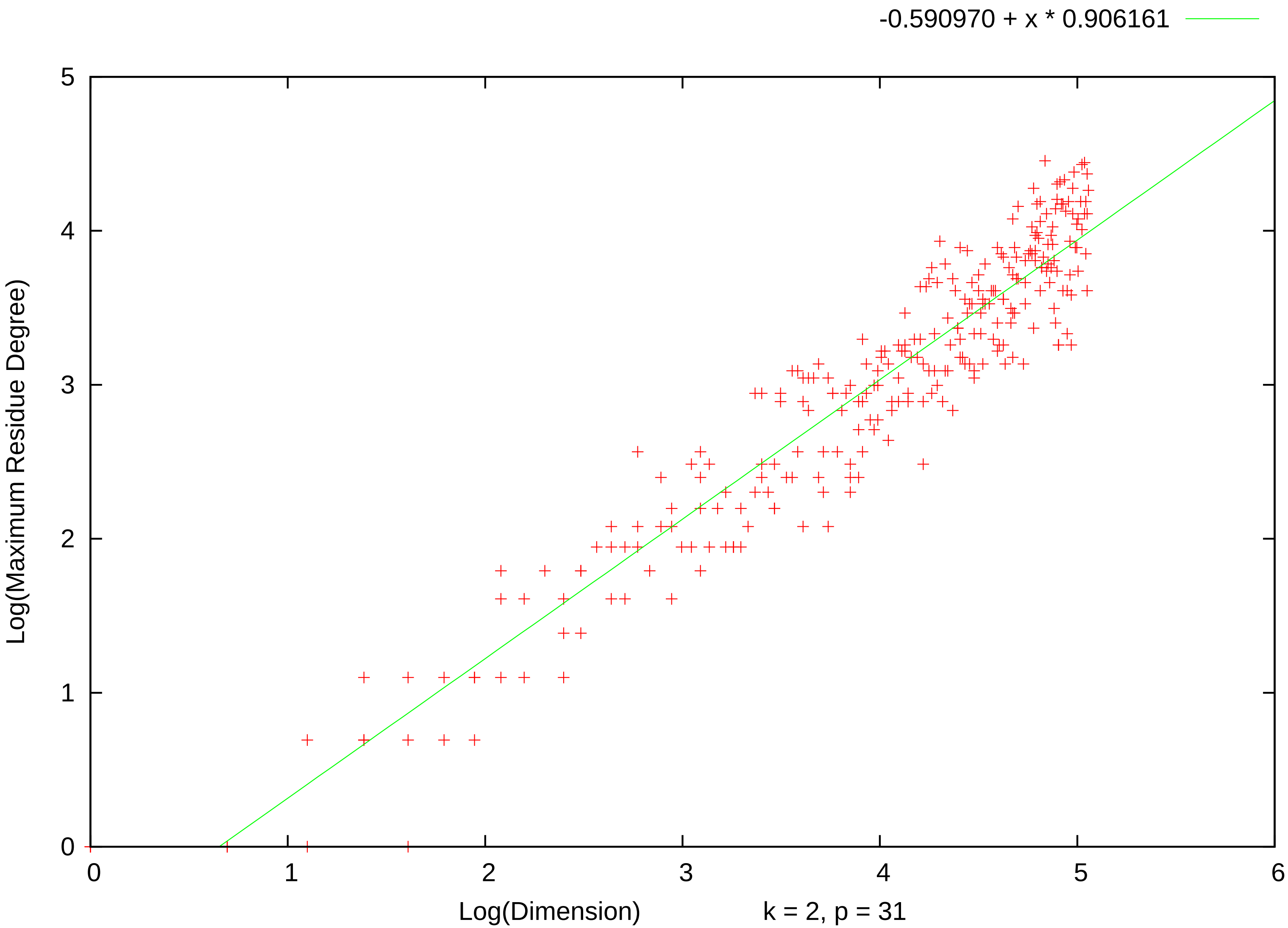
Grade von Koeffizientenkörpern



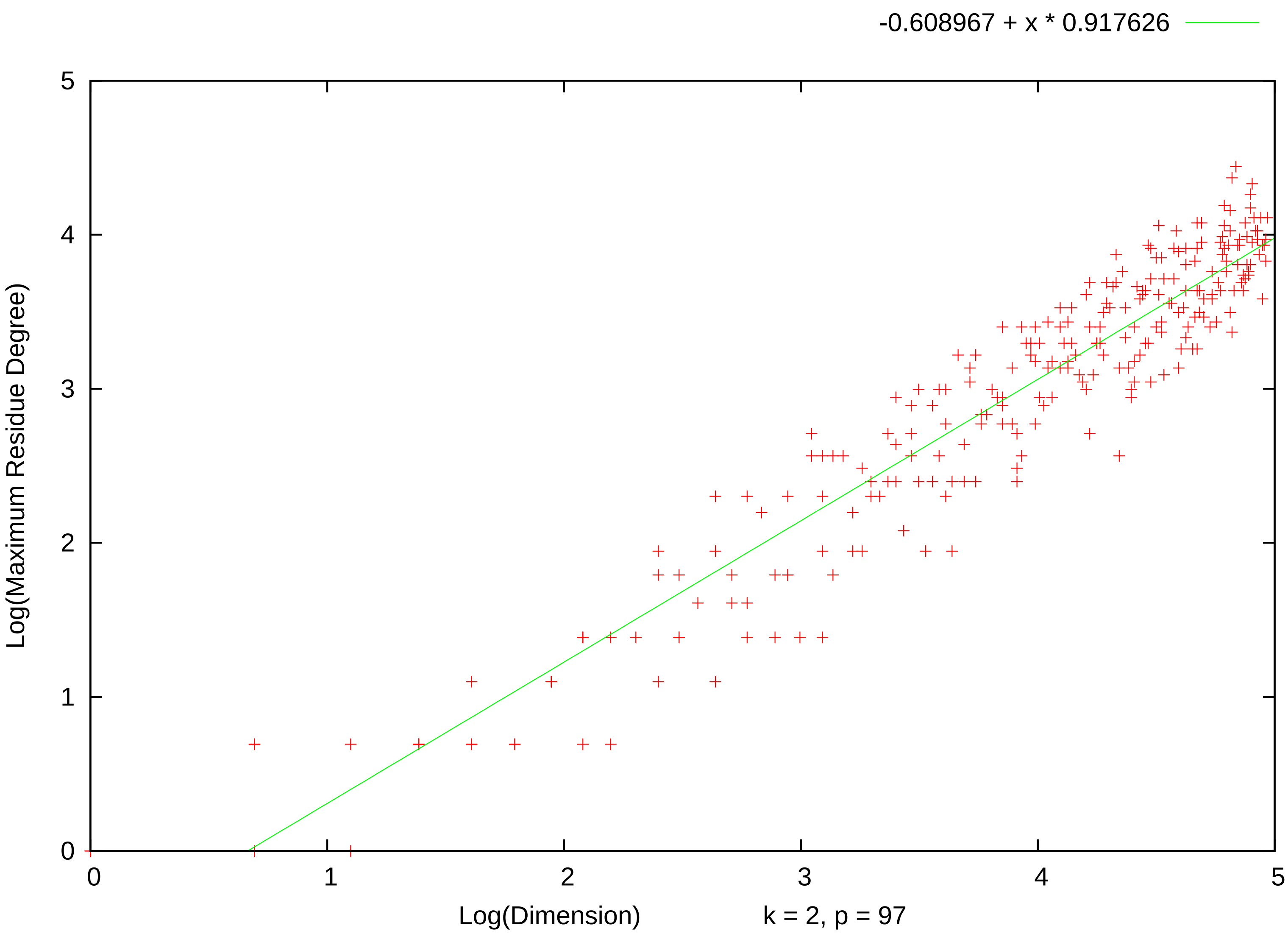
Grade von Koeffizientenkörpern



Grade von Koeffizientenkörpern



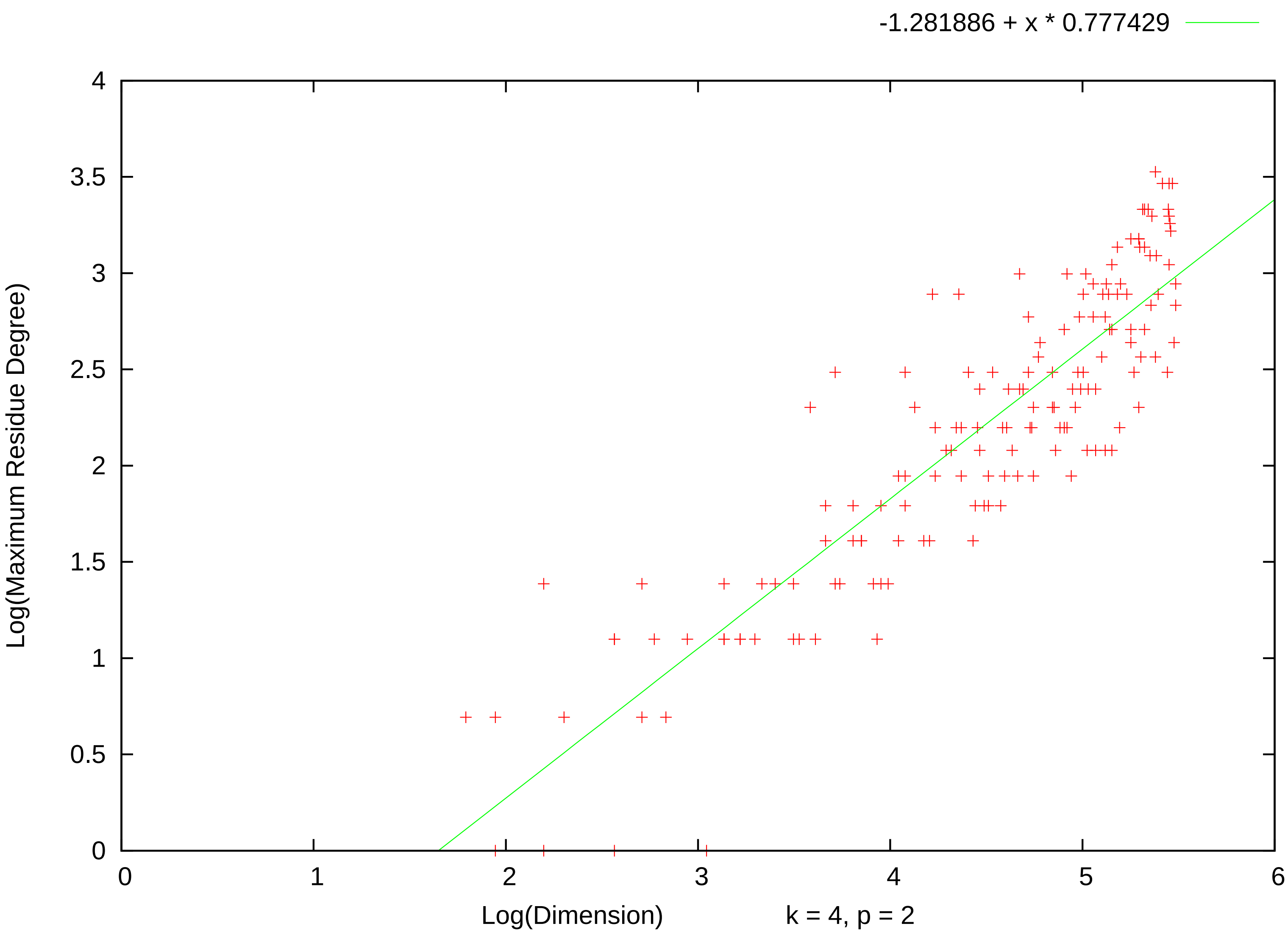
Grade von Koeffizientenkörpern



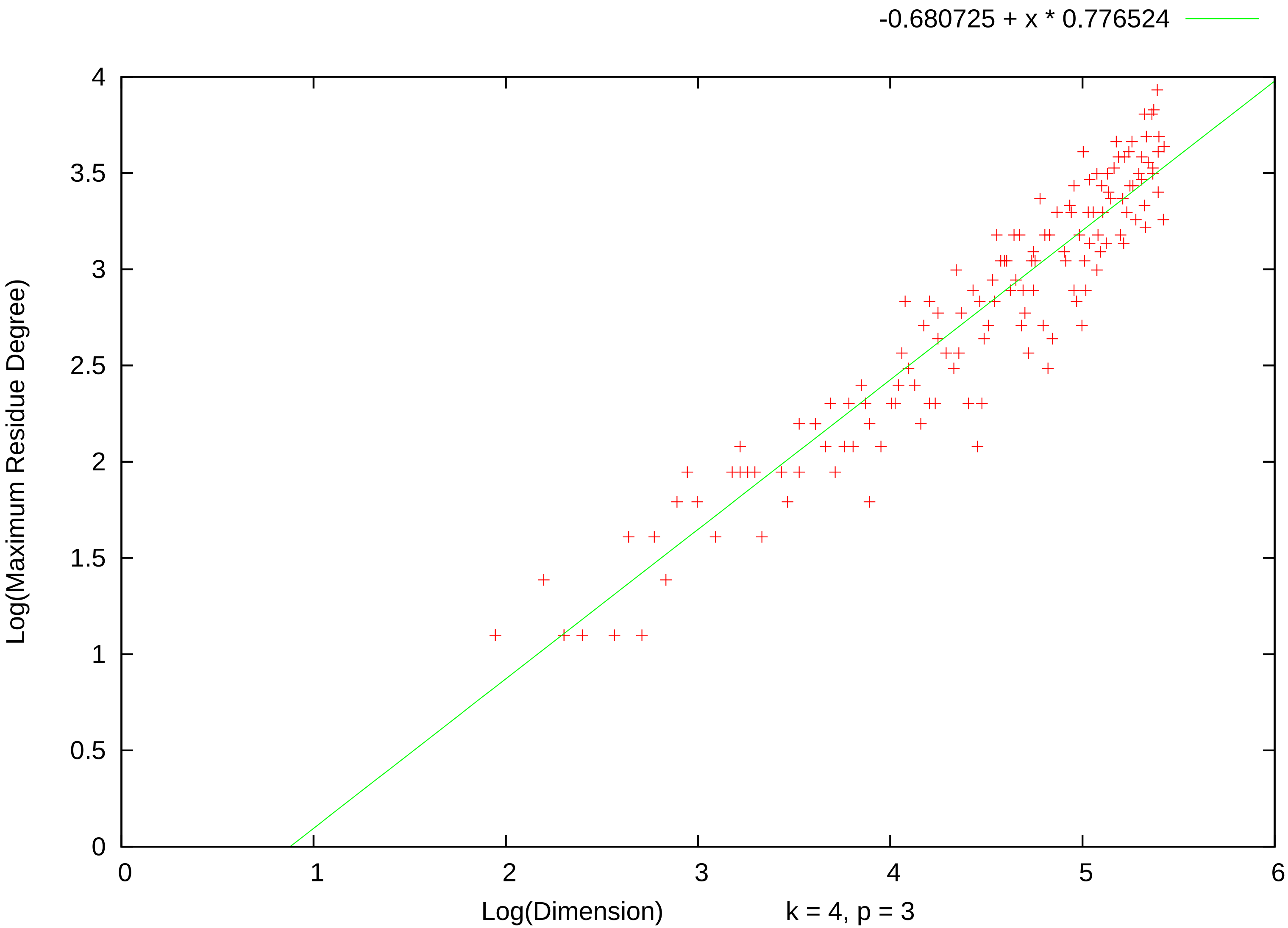
Grade von Koeffizientenkörpern

Jetzt $k = 4$.

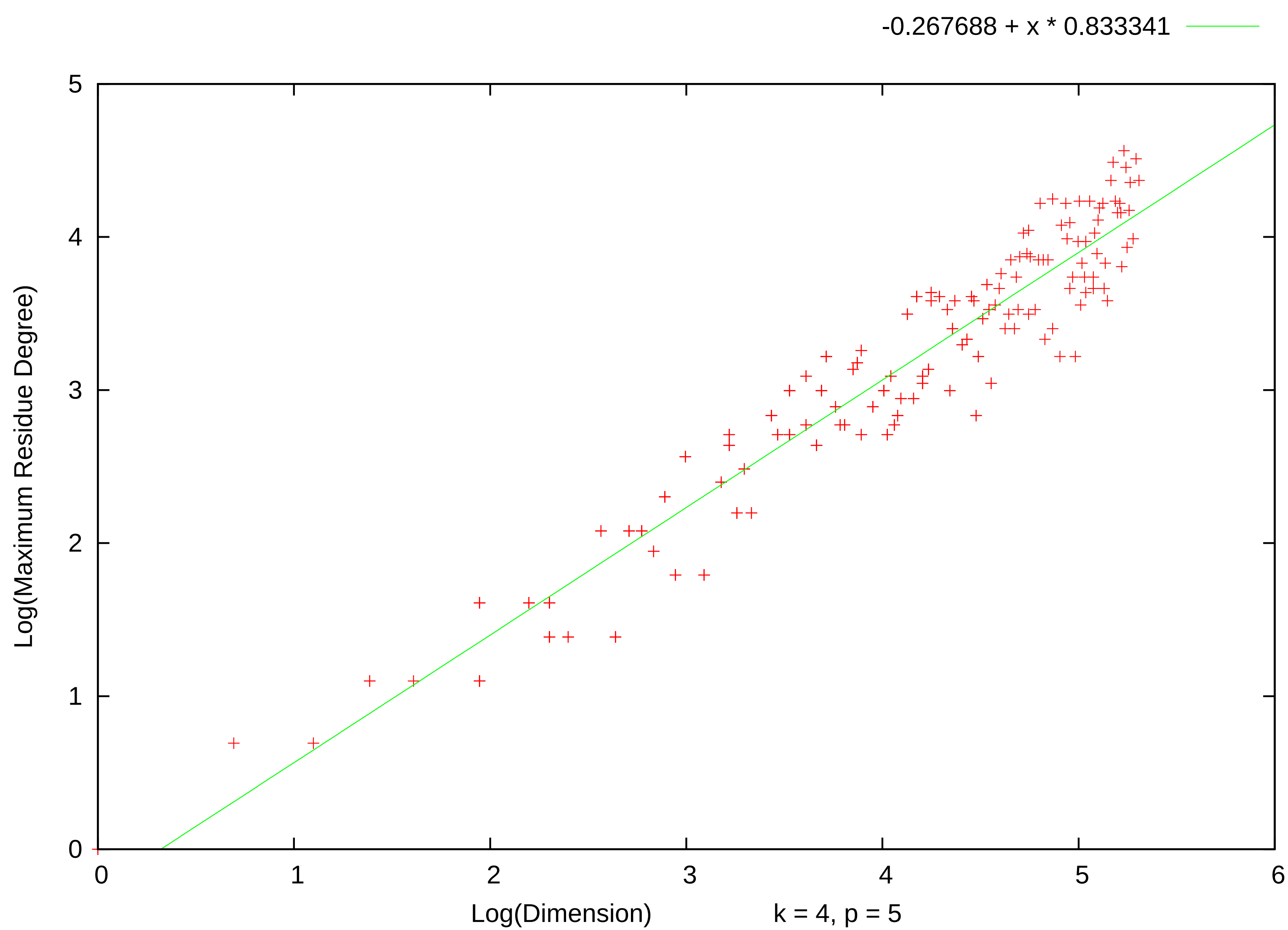
Grade von Koeffizientenkörpern



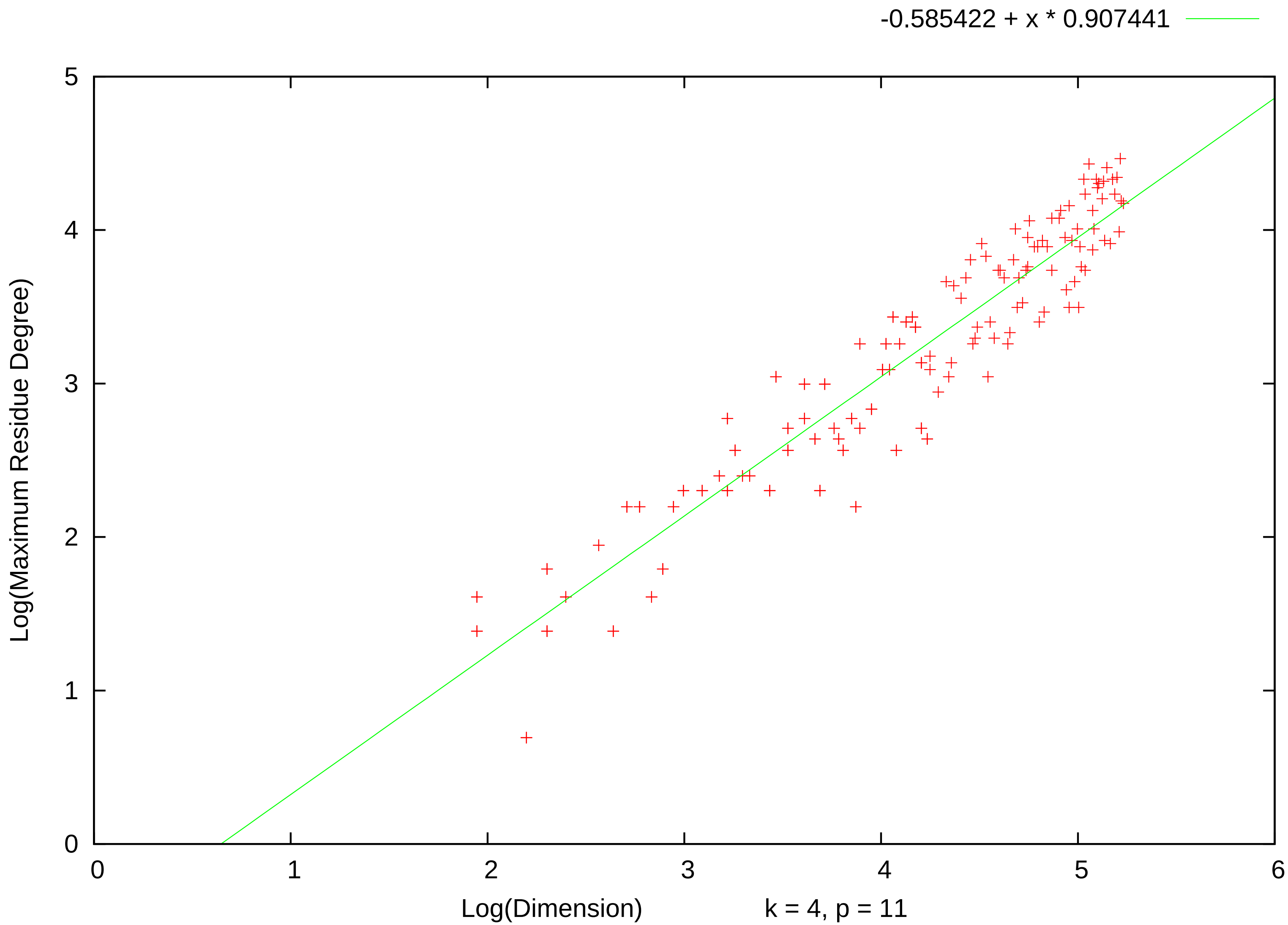
Grade von Koeffizientenkörpern



Grade von Koeffizientenkörpern



Grade von Koeffizientenkörpern



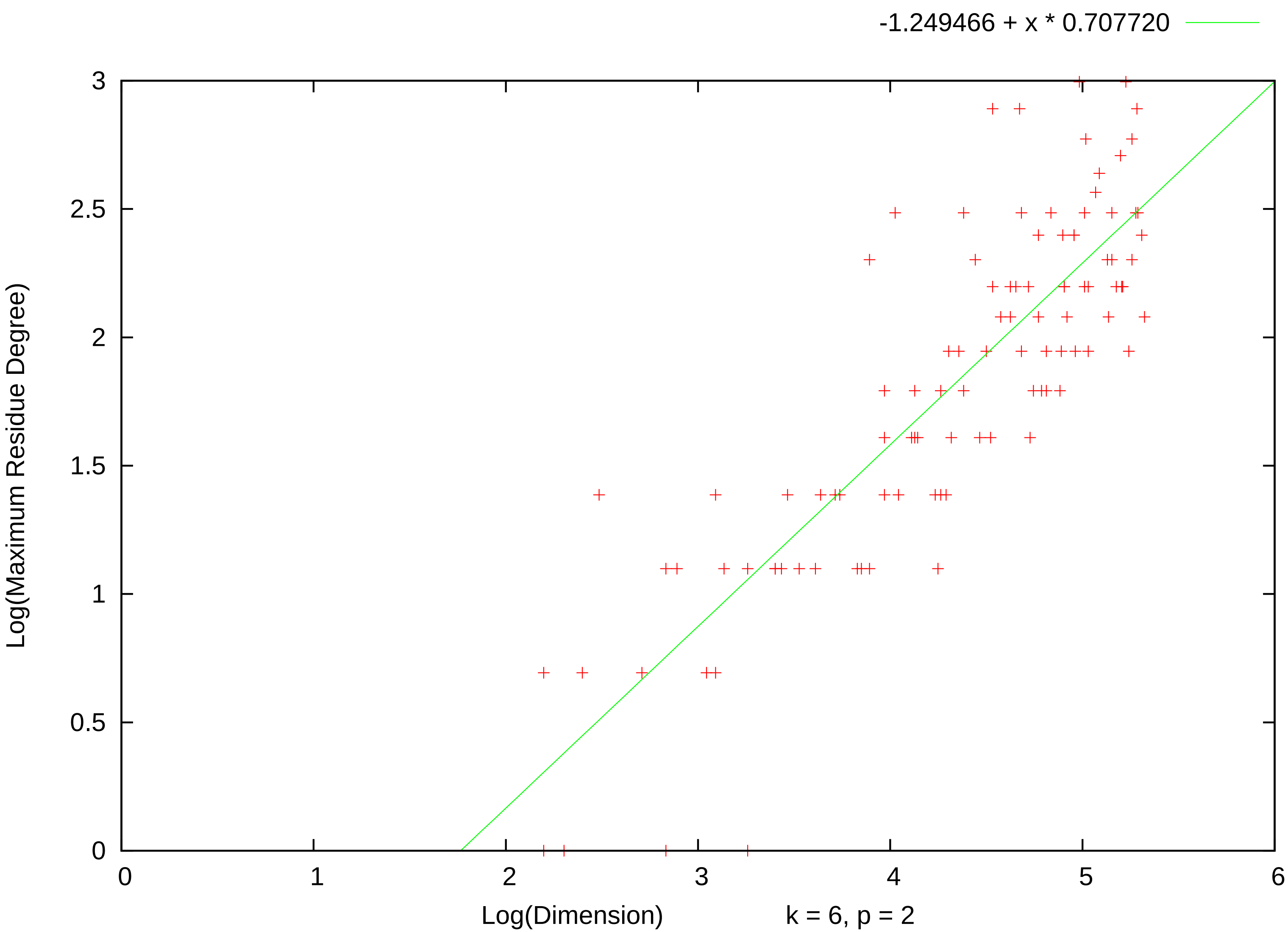
INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Grade von Koeffizientenkörpern

Jetzt $k = 6$.

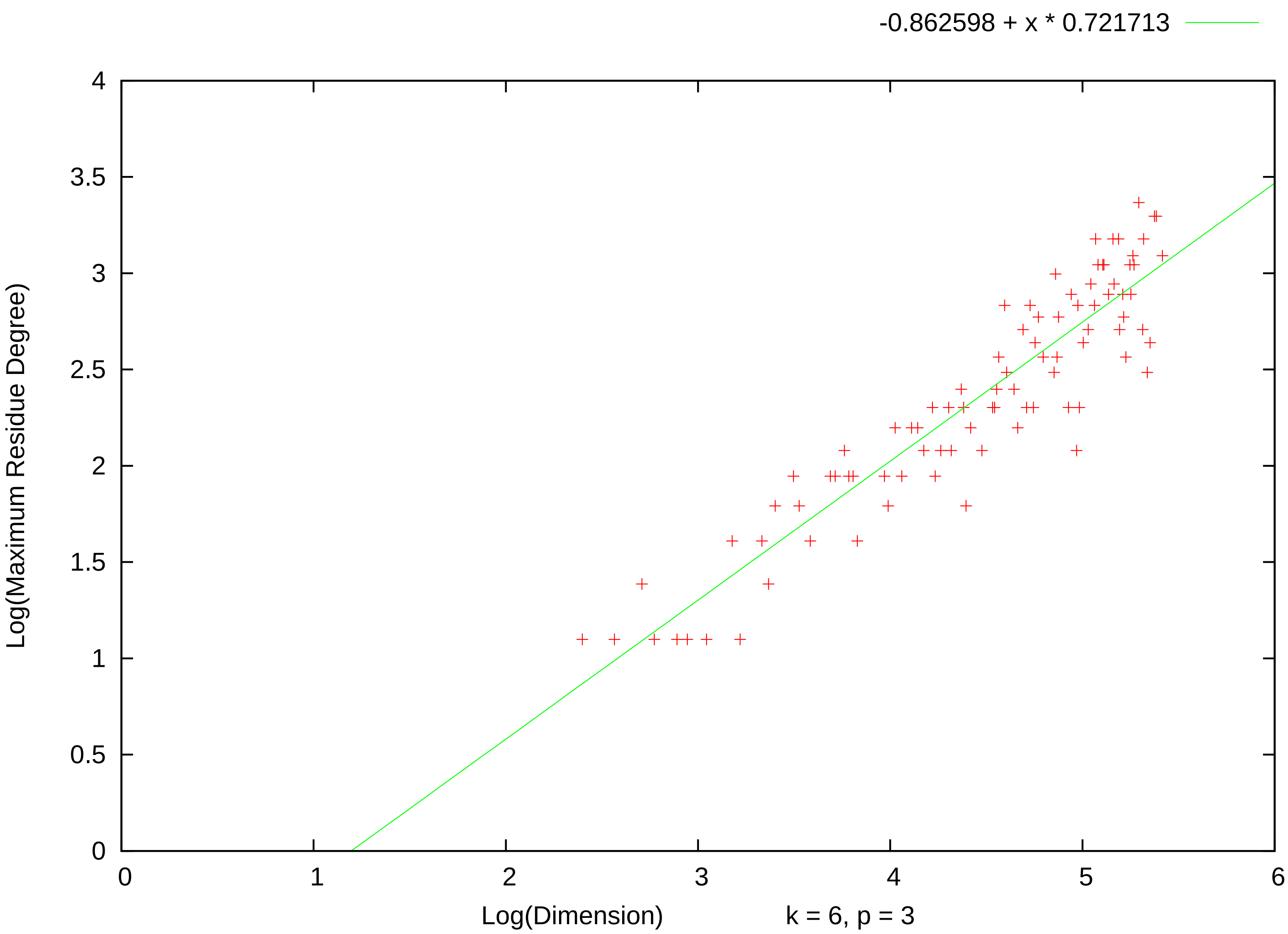
INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Grade von Koeffizientenkörpern



INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Grade von Koeffizientenkörpern



Grade von Koeffizientenkörpern

Frage: *Fixiere p und ein Gewicht $k \geq 2$.*

Gibt es $0 < \alpha \leq \beta < 1$ und $C, D > 0$, so dass

$$D \dim_k(N)^\beta \geq \max_k^{(p)}(N) \geq C \dim_k(N)^\alpha \quad ?$$

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

Grade von Koeffizientenkörpern

Frage: *Fixiere* p *und ein Gewicht* $k \geq 2$.

Gibt es $0 < \alpha \leq \beta < 1$ *und* $C, D > 0$, *so dass*

$$D \dim_k(N)^\beta \geq \max_k^{(p)}(N) \geq C \dim_k(N)^\alpha \quad ?$$

Die gleichen Fragen stellen wir auch für den mittleren Grad.

Danke!