Symboles modulaires et calcul de formes modulaires

Gabor Wiese

7 avril 2006

Résumé

Le but de cet exposé est de présenter les idées de base pour le calcul de formes modulaires à l'aide de symboles modulaires. Pour simplifier, on se restreint aux formes de poids deux.

On explique comment symboles modulaires et formes modulaires sont liés et démontre la description de symboles modulaires comme symboles de Manin par des moyens de la cohomologie des groupes. Cette description se déduit de façon très simple d'une propriété du groupe modulaire.

1 Algèbres de Hecke

Dans tout l'exposé N sera un entier positif. Dénotons par $S_2(N)$ les formes modulaires paraboliques de poids 2 pour le groupe $\Gamma_0(N)$. Rappelons qu'on dispose d'un q-développement, c. à d. une injection de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$S_2(N) \to \mathbb{C}[[q]], \quad f(\tau) \mapsto \sum_{n \geq 1} a_n(f) q^n$$

avec $q = e^{2\pi i \tau}$. On a l'action des opérateurs de Hecke T_n des deux côtés. La formule générale pour l'action de T_n sur les q-développement n'est pas importante dans notre contexte. Il suffit que les opérateurs commutent et que l'on a le cas spécial suivant :

$$a_1(T_n f) = a_n(f).$$

1.1 Définition. *Définissons* $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}_{\mathbb{Z}}(N)$ *comme le sous-anneau (*$\mathbb{Z}$*-algèbre) de* $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_2(N))$ *engendré par les* T_n *pour* $n \in \mathbb{N}$ *(il suffit de prendre* T_p *avec* p *premier). On appelle* $\mathbb{T}$ l'algèbre de Hecke de $S_2(N)$. *On dénotera* $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}(N) = \mathbb{T}_{\mathbb{Z}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.

Définissons le q-accouplement *comme*

$$\mathbb{T}_{\mathbb{C}}(N) \times S_2(N) \to \mathbb{C}, \quad (T, f) \mapsto a_1(Tf).$$

1.2 Lemme. *Le* q*-accouplement satisfait* $(T\tilde{T}, f) = (T, \tilde{T}f)$ *et il est parfait.*

Preuve. La formule est triviale. Il suffit de démontrer que l'accouplement est non-dégeneré. Supposons que $a_1(Tf) = 0$ pour tout $T \in \mathbb{T}_{\mathbb{C}}$, alors, en particulier, $a_1(T_n f) = a_n(f) = 0$ pour tout n. A cause du q-développement f est zéro. Soit maintenant $a_1(Tf) = 0$ pour tout f, en particulier, $a_1(T(T_n f)) = a_1(T_n T f) = a_n(Tf) = 0$ pour tout f et tout n. Cela revient à dire que T agit comme zéro sur $S_2(N)$. Mais, de la définition il suit que T est zéro. □

Nous avons alors l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels :

$$S_2(N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}),\ f = \sum_{n \geq 1} a_n(f) q^n \mapsto (T_n \mapsto a_n(f)).$$

En fait, plus est vrai. Si on fait de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ un $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-module en posant $(T.\phi)(\tilde{T}) := \phi(T\tilde{T})$, alors, cet isomorphisme est compatible avec l'action de $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$. L'inverse est

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \to S_2(N),\ \phi \mapsto \sum_{n \geq 1} \phi(T_n) q^n.$$

Appellons $f \in S_2(N)$ une *forme propre* si elle correspond à un élément ϕ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-\mathrm{alg}}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$. Cela revient à dire que f est normalisée ($\phi(T_1) = a_1(f) = 1$; T_1 est le 1 dans $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$) et $\phi(T_n T_m) = \phi(T_n)\phi(T_m)$, alors,

$$T_m. \sum_{n \geq 1} \phi(T_n) q^n = \sum_{n \geq 1} \phi(T_m T_n) q^n = \phi(T_m) \sum_{n \geq 1} \phi(T_n) q^n.$$

On retrouve alors la définition standard de forme propre.

1.3 Proposition. *Soit K un corps et A une K-algèbre de dimension finie : une* algèbre d'Artin. *Chaque idéal premier est maximal, parce que chaque élément non-nul du quotient a un polyôme minimal dont le coefficient constant n'est pas zéro. Il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux (la chaine $\mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \ldots$ s'arrête). Pour chaque idéal maximal $\mathfrak{m}$ il y a un r t.q. $\mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}^{r+1} =: \mathfrak{m}^\infty$ (à cause de la dimension). Le théorème chinois donne la décomposition en facteurs locaux*

$$A \cong \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)} A/\mathfrak{m}^\infty \cong \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)} A_{\mathfrak{m}}.$$

Preuve. L'intersection $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{m}$ ne contient que d'éléments nilpotents, alors on a $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{m}^\infty = \{0\}$. En conséquence, la première fleche est injective.

Posons $I = \sum_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}^\infty$. On a $I = A$. Car, supposons le contraire. Comme I est un idéal, il est contenu dans un idéal maximal, disons $\mathfrak{m}_1$. En particulier, chaque $\mathfrak{m}^\infty \subset \mathfrak{m}_1$. Soit $x \in \mathfrak{m}_2 - \mathfrak{m}_1$. Alors, il existe r t.q. $x^r \in \mathfrak{m}_1$, mais, comme $\mathfrak{m}_1$ est un idéal premier, on a $x \in \mathfrak{m}_1$, ce qui est une contradiction.

L'égalité $I = A$ montre la surjectivité de la première fleche. Le raisonnement ci-dessus a aussi donné que le seul idéal maximal contenant $\mathfrak{m}^\infty$ est $\mathfrak{m}$. En conséquence, $A/\mathfrak{m}^\infty$ est locale. Cela établit le deuxième isomorphisme. □

1.4 Corollaire. *Les formes propres et normalisées de* $S_2(N)$ *sont en bijection avec* $\operatorname{Spec}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}})$ *(prend le noyeau de l'homomorphisme d'algèbres correspondant).*

Si f *est une forme propre et normalisée qui correspond à l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$*, on dit que* $\mathbb{T}_{\mathbb{C},\mathfrak{m}}$ *est le* facteur local de Hecke associé à f.

Résumons le contenu de ce paragraphe on disant que la connaissance de l'algèbre de Hecke équivaut à la connaissance de $S_2(N)$, et la connaissance des facteurs locaux donne la connaissance des formes propres et normalisées (si on se restreint aux formes nouvelles, la dernière assertion est aussi une équivalence).

2 Symboles modulaires

Rappelons la définition des courbes modulaires $X_0(N)$:

$$X_0(N) = \Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H} \cup \Gamma_0(N)\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}).$$

On appellera $\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ les *pointes* de $X_0(N)$. Posons $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H}\cup\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ et $Y_0(N) = \Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}$.

Les symboles modulaires sont inspirées par la homologie de courbes modulaires. Malheureusement, il y a des petites différences à cause de torsion. Dans cette exposé on utilise des coefficients dans un corps de caractéristique zéro, $\mathbb{C}$ pour être précis, et on a l'égalité.

Regardons comme motivation le diagramme commutatif (pour $\Gamma = \Gamma_0(N)$)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}: & \mathbb{C}[X_0(N)] & \mathbb{C}[\text{chemins dans } X_0(N)] \arrow[l] & \mathbb{C}[\text{faces dans } X_0(N)] \arrow[l] \\
\mathcal{B}: & \mathbb{C}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]_\Gamma \arrow[u] & \mathbb{C}[\text{p-chemins dans } \overline{\mathbb{H}}]_\Gamma \arrow[l] \arrow[u] & \mathbb{C}[\text{p-faces dans } \overline{\mathbb{H}}]_\Gamma \arrow[l] \arrow[u] \\
\mathcal{C}: & \mathbb{C}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]_\Gamma \arrow[u, equal] & \mathbb{C}[\{\alpha,\beta\}|\alpha,\beta\in\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]_\Gamma \arrow[l] \arrow[u] & \mathbb{C}[\{\alpha,\beta\}+\{\beta,\gamma\}+\{\gamma,\alpha\}|\cdot]_\Gamma \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Il faut lire "chemin" comme "1-simplex" et "face" comme "2-simplex". Comme cela n'est qu'une motivation de la définition, on n'est pas trop précis. Par p-chemins je dessigne les chemins qui ont leurs deux points extrêmes dans les pointes. Une p-face est une face dont le bord consiste de p-chemins. Les applications de bord sont les usuelles pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. L'application de gauche pour $\mathcal{C}$ est donnée par $\{\alpha,\beta\}\mapsto\beta-\alpha$. L'application de droite est la naturelle. On a $H_1(\mathcal{A}) = H_1(X_0(N),\mathbb{C})$. En outre,

$$H_1(\mathcal{C}) \cong \ker\big((\mathbb{C}[\{\alpha,\beta\}|\alpha,\beta\in\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]/\langle\{\alpha,\beta\}+\{\beta,\gamma\}+\{\gamma,\alpha\}\rangle)_\Gamma \to \mathbb{C}[\Gamma\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]\big).$$

Nous appellons cet espace l'espace des *symboles modulaires paraboliques pour* $\Gamma_0(N)$ et le dénotons par $\mathcal{CM}_2(N)$.

Les applications verticales de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ sont les naturelles. L'application de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{B}_1$ envoie $\{\alpha, \beta\}$ sur le chemin géodésic de α à β, ceci un demi-cercle qui a α et β comme points sur le diamètre. Ainsi, l'élément $\{\alpha, \beta\} + \{\beta, \gamma\} + \{\gamma, \alpha\}$ de $\mathcal{C}_2$ est envoyé à la face ayant les géodètes de α à β, de β à γ et de γ à α comme bords. Pour que cela soit bien defini, il faut vérifier que $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ envoie une géodète sur une autre, ce qui est vrai.

2.1 Proposition. *Nous avons $H_1(\mathcal{C}) \cong H_1(\mathcal{B}) \cong H_1(\mathcal{A})$. En particulier, cela donne*

$$\mathcal{CM}_2(N) \cong H_1(X_0(N), \mathbb{C}).$$

Une démonstration sera donnée dans la prochaine section. On peut essayer de calculer ces isomorphisme directement, mais il faut se méfier parce que avec $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{C}$, on n'a que des surjections $H_1(\mathcal{C}) \twoheadrightarrow H_1(\mathcal{B}) \twoheadrightarrow H_1(\mathcal{A})$ où les noyeaux sont de torsion. Cette torsion vient de l'existence de stabilisateurs non-triviaux pour l'action de $\Gamma_0(N)$ sur $\mathbb{H}$.

2.2 Remarque. *Nous avons $H_1(\mathcal{B}) \twoheadrightarrow H_1(\mathcal{A})$ par un argument direct.*

Preuve. L'idée est que les éléments dans le noyeau de $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_0$ sont des lacets et qu'on peut toujours composer un lacet avec un autre qui passe par une pointe et est contractible.

Soit $x = \sum_\phi z_\phi \phi$ dans le noyeau de l'application de bord (les ϕ sont des chemins). Alors, $0 = \sum_\phi z_\phi(\phi(0) - \phi(1))$ dont il suit que pour chaque $a \in X_0(N)$ on a

$$0 = \sum_{\phi, \phi(0)=a} z_\phi - \sum_{\psi, \psi(1)=a} z_\psi.$$

Cela implique

$$0 = \sum_{\phi, \phi(0)=a} z_\phi\{\infty, a\} - \sum_{\psi, \psi(1)=a} z_\psi\{\infty, a\} = \sum_{\phi, \phi(0)=a} z_\phi\{\infty, a\} + \sum_{\psi, \psi(1)=a} z_\psi\{a, \infty\},$$

où $\{\infty, a\}$ signifie un chemin de ∞ (vue dans $X_0(N)$) à a. On en déduit :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{a \in X_0(N)} \Big(\sum_{\phi, \phi(0)=a} z_\phi \phi + \sum_{\psi, \psi(1)=a} z_\psi \psi - \sum_{\eta, \eta(0)=\eta(1)=a} z_\eta \eta \Big) \\ &= \sum_{a \in X_0(N)} \Big(\sum_{\phi, \phi(0)=a} z_\phi(\phi + \{\infty, a\}) + \sum_{\psi, \psi(1)=a} z_\psi(\psi + \{a, \infty\}) \\ &- \sum_{\eta, \eta(0)=\eta(1)=a} z_\eta(\eta + \{\infty, a\} + \{a, \infty\}) \Big). \end{aligned}$$

En composant les chemins, on voit que maintenant tous les chemins utilisés ont leurs bords dans les pointes (en fait, égale à l'image de ∞). Si on relève ces chemins dans $\overline{\mathbb{H}}$, on obtient la surjectivité demandée. $\square$

Pourquoi calcule-t-on $H_1(X_0(N), \mathbb{C})$? Parce que l'on a un isomorphisme, l'isomorphisme de *Eichler-Shimura*, de son dual avec les formes modulaires holomorphes et anti-holomorphes !

2.3 Proposition. *L'application*

$$S_2(N)\oplus\overline{S_2(N)}\to H_1(X_0(N),\mathbb{C})^\vee,\ \ (f,g)\mapsto \big(\gamma\mapsto\int_\gamma f(z)dz+\int_\gamma g(z)d\overline{z}\big)$$

est un isomorphisme. Avec les identifications ci-dessus, on peut remplacer $H_1(X_0(N),\mathbb{C})^\vee$ par $\mathcal{CM}_2(N)^\vee$. L'application devient alors

$$(f,g)\mapsto\big(\{\alpha,\beta\}\mapsto\int_\alpha^\beta f(z)dz+\int_\alpha^\beta g(z)d\overline{z}\big)$$

où le chemin d'intégration est le long de la géodète de α vers β.

Preuve. La preuve moderne marche avec la cohomologie et utilise la decomposition de Hodge :

$$H_1(X_0(N),\mathbb{C})^\vee\cong H^1(X_0(N),\mathbb{C})\cong H^1_{\mathrm{dR}}(X_0(N))\cong H^0(X_0(N),\Omega^{\mathrm{hol}}_{X_0(N)}\oplus\Omega^{\text{anti-hol}}_{X_0(N)}).$$

Une preuve dans le language des surfaces de Riemann se trouve dans plusieurs livres. $\square$

Rappelons pour $f\in S_2(N)$ et $M=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ que $(f|M)(z)=f(Mz)\frac{\det(M)}{(cz+d)^2}$.

2.4 Définition. *Soit p un nombre premier. Nous posons*

$$\mathcal{R}_p=\{\left(\begin{smallmatrix}1&r\\0&p\end{smallmatrix}\right)|r=0,1,\dots,p-1\}\cup\{\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\},$$

si $p\nmid N$, et sinon

$$\mathcal{R}_p=\{\left(\begin{smallmatrix}1&r\\0&p\end{smallmatrix}\right)|r=0,1,\dots,p-1\}.$$

On définie l'opérateur de Hecke T_p pour $f\in S_2(N)$ comme

$$(T_pf)(z)=\sum_{M\in\mathcal{R}_p}(f|M)(z)$$

et sur $\mathcal{CM}_2(N)$ par

$$T_p\{\alpha,\beta\}=\sum_{M\in\mathcal{R}_p}M\{\alpha,\beta\}=\sum_{M\in\mathcal{R}_p}\{M\alpha,M\beta\}$$

ce qu'on étend linéairement.

2.5 Proposition. *Les opérateurs de Hecke sont compatibles avec l'isomorphisme de la proposition 2.3.*

Preuve. Soit γ le chemin géodésic de α à β. On a pour $M=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$

$$\int_{M\gamma}f(z)dz=\int_\gamma f(Mz)d(Mz)=\int_\gamma f(Mz)\frac{\det(M)}{(cz+d)^2}dz=\int_\gamma(f|M)(z)dz,$$

d'où le résultat. $\square$

2.6 Corollaire. *L'algèbre de Hecke $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}}(N)$ (de $S_2(N)$) est isomorphe au sous-anneau de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{CM}_2(N))$ qui est engendré par les opérateurs T_p pour p premier.*

Ce corollaire veut dire que le problème du calcul de l'algèbre de Hecke est resolu si on peut calculer les operateurs de Hecke sur $\mathcal{CM}_2(\mathbb{C})$. C'est juste de l'algèbre linéaire, comme on verra plus clairement dans la prochaine section. On fait, il suffit de calculer les opérateurs T_p pour tout

$$p \leq \frac{N}{6} \prod_{l|N \text{ premier}} (1 - \frac{1}{l}).$$

2.7 Corollaire. *Le polynôme caractéristique de chaque opérateur de Hecke est dans $\mathbb{Z}[X]$. En particulier, les coéfficients de formes propres sont des entiers algébriques.*

Preuve. On peut remplacer $\mathbb{C}$ par $\mathbb{Z}$ dans la définition de $\mathcal{CM}_2(N)$. Pour ce $\mathbb{Z}$-module on utilise la notation $\mathcal{CM}_2(N, \mathbb{Z})$. Il est évident que $\mathcal{CM}_2(N, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathcal{CM}_2(N)$. La définition des opérateurs de Hecke est déjà valable sur $\mathcal{CM}_2(N, \mathbb{Z})$, d'où le résultat. $\square$

3 Cohomologie des groupes et symboles de Manin

Les symboles de Manin donnent la description simple des symboles modulaires en termes d'algèbre linéaire promise avant. Il y a des gens qui pour cela aiment faire de calculs difficiles avec l'homologie. Moi, j'aime bien la cohomologie des groupes, dont on peut déduire les résultats facilement.

Comme je ne suppose pas la connaissance de la cohomologie des groupes, je donne une définition "ad hoc" et je cite de techniques bien connues. Mentionnons quand-même la "vraie" définition. Soit G un groupe. On a le foncteur $M \mapsto M^G$ qui prend des G-invariants d'un G-module M. Ce foncteur est exacte à gauche. La cohomologie de la dérivée de ce foncteur est la cohomologie de G.

3.1 Définition. *Soit G un groupe et M un G-module. On pose*

$$\begin{aligned}
Z^1(G, M) &= \{f : G \to M \mid f(gh) = g.f(h) + f(g) \ \forall g, h \in G\}, \\
B^1(G, M) &= \{f : G \to M \mid \exists m \in M : f(g) = (1 - g)m \ \forall g \in G\}, \\
H^1(G, M) &= Z^1(G, M)/B^1(G, M).
\end{aligned}$$

3.2 Définition. *Pour $\Gamma = \Gamma_0(N)$ on définit la* cohomologie parabolique *comme*

$$H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, M) = \ker \big(H^1(\Gamma, M) \to \prod_{c \in \Gamma \backslash \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} H^1(\Gamma_c, M)\big),$$

où Γ_c est le stabilisateur de la pointe c (ici, on fait un choix qui ne change rien pour H^1_{par}), alors, si $c = \sigma\infty$ pour $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ on a $\Gamma_c = \langle \sigma \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \sigma^{-1} \rangle$. L'application est la restriction naturelle.

3.3 Proposition. *Soit $\Gamma = \Gamma_0(N)$. Dans le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1(X_0(N),\mathbb{C})^\vee \cong H^1(X_0(N),\mathbb{C}) \arrow[r] & H^1(Y_0(N),\mathbb{C}) \arrow[r] & \prod_{c\in\Gamma\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} H^1(U_c,\mathbb{C}) \\
0 \arrow[r] & H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma,\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[u, "\sim"'] & H^1(\Gamma,\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[u, "\sim"'] & \prod_{c\in\Gamma\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} H^1(\Gamma_c,\mathbb{C}) \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

les rangées sont de suites exactes. La notation U_c signifie un petit disque pointu autour de c.

En particulier, on a

$$H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma,\mathbb{C}) \cong (\mathcal{CM}_2(N))^\vee.$$

On ne démontre pas cette proposition. Elle est située dans la théorie des surfaces de Riemann. Alors, elle n'utilise rien de particulier sur les courbes modulaires. On voit que la cohomologie dérivée du foncteur $H^0(X_0(N),\cdot)$ est la même que la cohomologie du foncteur prenant les G-invariants. Aussi ici il faut se méfier. Les applications verticales ne sont pas d'isomorphismes en général (seulement des surjections), à cause de possible torsion. Comme nos coefficients sont dans $\mathbb{C}$ il n'y a pas de problème.

3.4 Proposition. *On peut décrire l'isomorphisme $\mathcal{CM}_2(N)^\vee \cong H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma,\mathbb{C})$ explicitement. L'application est la suivante :*

$$\mathcal{CM}_2(N)^\vee \ni f \mapsto (\gamma \mapsto f(\{\gamma\infty,\infty\})) \in H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma,\mathbb{C}).$$

Preuve. Notons d'abord la formule

$$\{\alpha,\beta\} + \{\beta,\gamma\} = \{\alpha,\gamma\}.$$

Vérifions maintenant que l'application est bien définie, alors, que l'image est dans $Z^1(\Gamma,\mathbb{C})$ et s'annulle sur les pointes. On a

$$f(\{gh\infty,\infty\})) = f(\{gh\infty, g\infty\} + \{g\infty,\infty\}))) = f(\{h\infty,\infty\}) + f(\{g\infty,\infty\}),$$

alors, la première assertion est vraie. Soit $T = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. On a

$$\{\sigma \pm T^r\sigma^{-1}\infty,\infty\} = \{\sigma \pm T^r\sigma^{-1}\sigma\infty,\sigma\infty\} = \{\sigma \pm T^r\infty,\sigma\infty\} = \{\sigma\infty,\sigma\infty\} = 0$$

impliquant la deuxième assertion. Nous avons utilisé la formule

$$\{M\alpha,\alpha\} = \{M\alpha, M\infty\} + \{M\infty,\alpha\} = \{\alpha,\infty\} + \{M\infty,\alpha\} = \{M\infty,\infty\}.$$

Montrons mainenant que chaque $x \in \mathcal{CM}_2(N)$ a une représentation de la forme $\sum_i a_i\{g_i\infty,\infty\}$ pour $a_i \in \mathbb{C}$ et $g_i \in \Gamma$. Stein appelle cela la *transportabilité* des symboles modulaires paraboliques. Choisissons un système de représentants des pointes $\Gamma\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, dénoté par $\mathcal{R}$. Il est clair qu'on peut écrire (utilisant $\{\alpha,\beta\} = \{\alpha,\infty\} - \{\beta,\infty\}$)

$$x = \sum_{c\in\mathcal{R}} \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_c} a_{c,\gamma}\{\gamma c,\infty\}.$$

Alors,

$$x = \sum_{\Gamma/\Gamma_\infty} a_{\infty,\gamma}\{\gamma\infty,\infty\} + \sum_{c\in\mathcal{R}-\{\infty\}} \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_c} a_{c,\gamma}(\{\gamma\infty,\infty\}+\{\gamma c,\gamma\infty\}),$$

mais,

$$\sum_{c\in\mathcal{R}-\{\infty\}} \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_c} a_{c,\gamma}\{\gamma c,\gamma\infty\} = \sum_{c\in\mathcal{R}-\{\infty\}} \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_c} a_{c,\gamma}\{c,\infty\} = 0,$$

parce que autrement x ne serait pas dans le noyeau de l'application de bord. Cela montre l'assertion concernant la représentation.

Sachant ceci, il est évident que notre homomorphisme de la proposition est injective : Si f est dans le noyeau, on a $f(\{\gamma\infty,\infty\})=0$ pour tout γ, alors, $f(x)=0$ pour tout x.

Encore une fois, la surjectivité n'est pas vraie avec de coefficients quelconques. Etant sur $\mathbb{C}$, on peut comparer les dimensions. Comme on a

$$\{\gamma_1^{e_1}\dots\gamma_r^{e_r}\infty,\infty\} = \sum_{i=1}^{n} e_i\{\gamma_i\infty,\infty\}$$

et pour $g \in H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma,\mathbb{C})$

$$g(\gamma_1^{e_1}\dots\gamma_r^{e_r}) = \sum_{i=1}^{n} e_i f(\gamma_i)$$

les dimension de deux côtés sont égales au nombre maximal d'éléments dans Γ^{ab} qui ne satisfont à aucune rélation entre eux. Ce nombre est en fait égal à deux fois le genre de $X_0(N)$ et égal à la dimension de $H_1(X_0(N),\mathbb{C})$ qui est égal au rang de l'abélianisé du groupe fondamental. □

Notons que nous avons démontré la proposition 2.1, modulo la proposition 3.3. Une autre façon pour démontrer cet isomorphisme est d'utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris pour la (co-)homologie de groupes.

On calculera maintenant le groupe $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_0(N),\mathbb{C})$ explicitement. Pour cela on pose

$$S := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad T := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad U := ST = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right).$$

Par les mêmes symboles on dénote aussi leurs classes dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

On utilisera la propriété suivante.

3.5 Proposition. *Le groupe* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ *est le produit libre des groupes* $\langle S\rangle$ *et* $\langle U\rangle$ *qui ont l'ordre* 2 *et* 3*. Autrement dit,* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ *est engendré par* S *et* U *et les seules relations sont* $S^2=U^3=1$.

Preuve. (Esquisse.) Soit $\mathcal{F}$ le domaine fondamental standard. Il est facile de voir que chaque point dans $\mathbb{H}$ peut être transporté dans $\mathcal{F}$ par une combinaison de S et T. Cela montre que S et T engendrent $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Alors, S et U l'engendrent aussi.

Je ne connait pas de façon simple de démontrer la liberté. □

3.6 Proposition. (Lemme de Shapiro) *Soit* $\mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} := \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathbb{C}[\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})], \mathbb{C})$. *Alors, on a*

$$H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, \mathbb{C}) \cong H^1_{\mathrm{par}}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})}).$$

3.7 Proposition. *On a la suite exacte*

$$0 \to H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, \mathbb{C}) \to M/(M^{\langle S\rangle} + M^{\langle U\rangle}) \xrightarrow{m \mapsto (1-S)m} M/(1-T)M,$$

où $M = \mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})}$.

Preuve. Une vérification élémentaire donne qu'il suffit de démontrer

$$H^1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), M) \cong M/(M^{\langle S\rangle} + M^{\langle U\rangle}).$$

Nous déterminons $f \in Z^1(\Gamma, M)$. A part de $f(1) = 0$, on a

$$0 = f(S^2) = Sf(S) + f(S) = (1+S)f(S)$$

et

$$0 = f(U^3) = \cdots = (1 + U + U^2)f(U).$$

Comme il n'y a pas d'autres relations dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, $f \in Z^1(\Gamma, M)$ est uniquement donné par

$$f(S) \in \ker(1+S) \quad \text{et} \quad f(U) \in \ker(1 + U + U^2).$$

Mais, on a

$$\ker(1+S) = \mathrm{im}(1-S) \quad \text{et} \quad \ker(1+U+U^2) = \mathrm{im}(1-U),$$

car 2 et 3 sont inversible (on est sur $\mathbb{C}$). (C'est un calcul élémentaire qu'on peut aussi remplacer par $\hat{H}_0(\langle S\rangle, M) = \hat{H}_0(\langle U\rangle, M) = 0$.) Les éléments dans $B^1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), M)$ sont de la forme $g \mapsto (1-g)m$ pour un $m \in M$.

Ecrivons une application :

$$\phi : M \to H^1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), M), \ \ m \mapsto (S \mapsto (1-S)m, U \mapsto 0).$$

Elle est surjective. Car, soit $f \in Z^1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}, M))$ avec $f(S) = (1-S)m$ et $f(U) = (1-U)n$ pour $n, m \in M$. Prenons $g : a \mapsto (1-a)n \in B^1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), M)$. Alors, $(f-g)(U) = 0$ et $(f-g)(S) = (1-S)(m-n)$, ce qui montre la surjectivité.

Le noyeau de ϕ est donné par

$$\ker(1-S) + \ker(1-U) = M^{\langle S\rangle} + M^{\langle U\rangle}.$$

Supposons alors que f avec $f(S) = (1-S)m$ et $f(U) = 0$ est un bord, alors il existe n t.q. $(1-S)m = (1-S)n$ et $(1-U)n = 0$. Cela veut dire $n \in \ker(1-U)$ et $m - n \in \ker(1-S)$ dont il suit que $m \in \ker(1-S) + \ker(1-U)$, donnant l'isomorphisme recherché. □

Si l'on choisi un système de représentants de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma_0(N)$ (ce qui est facile), on a maintenant une description en termes d'algèbre linéaire. On appelle les éléments de l'espace $\ker\big(M/(M^{\langle S\rangle} + M^{\langle U\rangle}) \to M/(1-T)M\big)$ *symboles de Manin paraboliques.* Merel a donné une description explicite des opérateurs de Hecke sur cet espace. Mais on pourrait aussi faire des aller-retours entre les symboles modulaires et les symboles de Manin.

Mentionnons encore une autre approche, plus élégante, venant de la théorie de cohomologie des groupes, qui est basée sur la suite exacte de Mayer-Vietoris. Aussi la preuve de la proposition 3.4 peut en être déduite. Cette approche était prise dans ma prépublication *On modular symbols and the cohomology of Hecke triangle surfaces.*

3.8 Proposition. (Suite de Mayer-Vietoris) *Soit M un $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$-module qui est aussi un espace vectoriel. Comme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est le produit libre de $\langle S\rangle$ et $\langle U\rangle$, on a la suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), M) \to H^0(\langle S\rangle, M) \oplus H^0(\langle U\rangle, M) \to M \\ \to H^1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), M) \to H^1(\langle S\rangle, M) \oplus H^1(\langle U\rangle, M) \end{aligned}$$

qui est explicitement donnée (si M est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) par

$$0 \to M^{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} \to M^{\langle S\rangle} \oplus M^{\langle U\rangle} \to M \to H^1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), M) \to 0.$$

On a aussi la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}[\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})] \to \mathbb{Z}[\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})/\langle S\rangle] \oplus \mathbb{Z}[\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})/\langle U\rangle] \to \mathbb{Z} \to 0.$$