Notizen zum Oberseminarvortrag “Verträglichkeit von Néron-Modellen unter Basiswechsel und Isogenien”

Gabor Wiese

25. Januar 2006

Zusammenfassung

Der Vortrag behandelt - grob gesprochen - die Seiten 174 bis 182 von [BLR]. Alle nicht anders angegebenen Referenzen beziehen sich auf dieses Buch.

1 Gruppenglättungen als Néron-Modelle

Motivation und Wiederholung

Beginnen wir mit einigen Wiederholungen.

Theorem 1.1 (Thm. 7.1/1) *Sei R ein DBR. Sei G ein glattes R-Gruppenschema von endlichem Typ oder ein Torseur unter einem glatten R-Gruppenschema von endlichem Typ. Dann sind äquivalent:*

(a) G ist Néron-Modell seiner generischen Faser G_K.

(b) G ist separiert und erfüllt die Erweiterungseigenschaft étaler Punkte.

Beweis. Volkers Vortrag. □

Satz 1.2 (Prop. 1.2/4) *Sei S ein Dedekindschema und X ein S-Schema von endlichem Typ. Dann sind äquivalent:*

(a) X ist Néron-Modell seiner generischen Faser X_K.

(b) Für alle abgeschlossenen Punkte $s \in S$ ist das $\mathcal{O}_{S,s}$-Schema $X \times_S \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ ein Néron-Modell seiner generischen Faser.

Beweis. Denis’ Vortrag. □

Der Beweis des folgenden wichtigen Satzes wurde in Denis’ Vortrag nur skizziert und benutzte schwere Sätze. Hier erhalten wir ihn sehr einfach.

Satz 1.3 (Prop. 1.2/8) *Sei X ein abelsches Schema über einem Dedekindschema S. Dann ist X das Néron-Modell seiner generischen Faser X_K (genauer des Schemas der generischen Punkte).*

Beweis. Mittels Prop. 1.2/4 genügt es die lokale Situation zu betrachten. Wegen der Eigentlichkeit von $G \to S$ ist die Erweiterungseigenschaft étaler Punkte erfüllt. Daher erhalten wir den Satz aus Theorem 7.1/1. □

Definition der Gruppenglättung

Definition 1.4 *Seien S ein Dedekindschema und G ein S-Gruppenschema von endlichem Typ mit glattem Schema der generischen Fasern G_K.*

Ein glattes S-Gruppenschema G' von endlichem Typ zusammen mit einem Morphismus von S-Gruppenschemata $f : G' \to G$ heißt Gruppenglättung*, wenn folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:*

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "f"] & G \\ Z \arrow[u, dotted, "\psi"] \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Für alle glatten S-Schemata Z mit Morphismus $\phi : Z \to G$ existiert genau ein Morphismus ψ, der das Diagramm kommutativ macht. (Achtung: Z ist nicht auf S-Gruppenschemata beschränkt.)

Der Begriff der Gruppenglättung sollte nicht in Analogie zu dem der Glättung aus Kapitel 3 gesehen werden. Beide sind von Grunde auf verschieden. Eine Glättung braucht nämlich nicht einmal glatt zu sein, dafür ist sie eigentlich. Auch wenn man zum glatten Ort der Glättung übergeht, hat man noch keine universelle Eigenschaft wie bei der Gruppenglättung, sondern nur eine Bijektion auf den R^{sh}-wertigen Punkten. Umgekehrt ist allerdings eine Gruppenglättung im lokalen Fall eine Schema, das dem Korollar zur Glättung genügt, also eine Bijektion auf den R^{sh}-wertigen Punkten gibt. Denn ein R^{sh}-wertiger Punkt von G faktorisiert nach der universellen Eigenfschaft der Gruppenglättung durch einen eindeutigen R^{sh}-wertigen Punkt von G'.

Bemerkung 1.5 (a) Wenn eine Gruppenglättung existiert, dann ist sie bis auf kanonische Isomorphie eindeutig (wegen der universellen Eigenschaft).

(b) Ist G schon selbst glatt und von endlichem Typ, dann ist G die Gruppenglättung von sich selbst. Denn man kann die universelle Eigenschaft trivial für G überprüfen.

(c) Eine Gruppenglättung ist ein Isomorphismus auf der generischen Faser. Denn man kann die universelle Eigenschaft für G_K benutzen und erhält einen Morphismus $G_K \to G'$, der über G'_K faktorisiert. Der so enstandene Morphismus $G_K \to G'_K$ ist beidseitig invers zum Morphismus $G'_K \to G_K$ der aus $G' \to G$ kommt.

(d) Ist G separiert, so auch G'. Denn der Einsschnitt von G ist das Kompositum

$$\mathrm{Spec}(R) \xrightarrow{\epsilon} G' \to G.$$

Dieses ist nach Voraussetzung eine abgeschlossene Immersion. Somit ist bereits ϵ eine abgeschlossene Immersion.

(e) Im lokalen Fall, also $S = \mathrm{Spec}(R)$ mit diskretem Bewertungsring R, gilt, dass $G(R^{\mathrm{sh}}) \to G(K^{\mathrm{sh}})$ genau dann surjektiv ist, wenn $G'(R^{\mathrm{sh}}) \to G'(K^{\mathrm{sh}})$ surjektiv ist. Denn wegen der Gleichheit der generischen Fasern von G und G' erhalten wir

$$G'(R^{\mathrm{sh}}) \to G'(K^{\mathrm{sh}}) = G'_K(K^{\mathrm{sh}}) = G_K(K^{\mathrm{sh}}).$$

Dieser Morphismus faktorisiert aber wegen des Morphismus $G' \to G$ über $G(R^{\mathrm{sh}})$ und ist daher wegen der Surjektivität von $G(R^{\mathrm{sh}}) \to G(K^{\mathrm{sh}})$ selbst surjektiv.

Theorem 1.6 *Sei $S = \mathrm{Spec}(R)$ für einen diskreten Bewertungsring R und G ein S-Gruppenschema von endlichem Typ. Dann besitzt G eine Gruppenglättung G'.*

Vor dem Beweis geben wir ein Korollar.

Korollar 1.7 *Sei $S = \mathrm{Spec}(R)$ für einen diskreten Bewertungsring R. Gegeben sei ein separiertes S-Gruppenschema G von endlichem Typ mit glatter generischer Faser G_K.*

Ist dann $G(R^{\mathrm{sh}}) \to G(K^{\mathrm{sh}})$ surjektiv, dann ist die Gruppenglättung G' von G ein Néron-Modell von G_K.

Beweis. In Bemerkung 1.5 haben wir bereits gesehen, dass G' separiert ist und $G'(R^{\mathrm{sh}}) \to G'(K^{\mathrm{sh}})$ surjektiv ist. Außerdem ist $G_K = G'_K$ und somit liefert Theorem 7.1/1 das Resultat. □

Beweis der Existenz der Gruppenglättung

Die Gruppenglättung wird genauso wie die Glättung im Kapitel 3 durch eine endliche Folge von Ausdehnungen konstruiert.

Lemma 1.8 *Sei k ein Körper und X ein k-Schema. Ferner sei eine Teilmenge $\mathcal{C} \subset X(k_{\mathrm{sep}})$ gegeben. Dann ist der Zariski-Abschluss von $\mathcal{C}$ in X mit der reduzierten induzierten Struktur automatisch geometrisch reduziert.*

Beweis. (Mit Dank an Niko.) Da (geometrische) Reduziertheit eine lokale Eigenschaft ist, können wir ohne Einschränkung $X = \mathrm{Spec}(A)$ nehmen mit einer Noetherschen k-Algebra A. Der Zariski-Abschluss ist der kleinste Quotient A/I, so dass jeder Punkt $a : \mathrm{Spec}(k_{\mathrm{sep}}) \to A$ in $\mathcal{C}$ über A/I faktorisiert. Damit ist klar, dass $I \subset \ker(a)$ für alle $a \in \mathcal{C}$. Das größte solche Ideal ist offenbar $J := \bigcap_{a\in\mathcal{C}} \ker(a)$. Dieses ist als Durchschnitt von Radikidealen selbst ein Radikalideal. Damit ist der reduzierte induzierte Zariski-Abschluss gleich $\mathrm{Spec}(A/J)$.

Da die Erweiterung $k \to \overline{k}$ flach ist, gilt, dass die Folge

$$0 \to \ker(a) \otimes_k \overline{k} \to A \otimes_k \overline{k} \to k_{\mathrm{sep}} \otimes_k \overline{k}$$

exakt ist. Da $k_{\mathrm{sep}} \otimes_k \overline{k}$ reduziert ist (hier gebraucht man die Separabilität - leicht auf endliche separable Erweiterungen zurückzuführen), ist $\ker(a) \otimes_k \overline{k}$ ein Radikalideal. Daher ist auch $\bigcap_{a \in \mathcal{C}} \ker(a) \otimes_k \overline{k} = J \otimes_k \overline{k}$ ein Radikalideal. Also ist $A/J \otimes_k \overline{k} \cong (A \otimes_k \overline{k})/(J \otimes_k \overline{k})$ reduziert, was bedeutet, dass A/J geometrisch reduziert ist. □

Wir setzen $G_0 := G$. Nun konstruieren wir induktiv flache R-Gruppenschemata G_{i+1} zusammen mit Morphismen $G_{i+1} \to G_i$ von R-Gruppenschemata.

Nimm an, dass G_i bereits konstruiert sei. Dann setzen wir

$$\mathcal{C}_i := \mathrm{Bild}(G_i(R^{\mathrm{sh}}) \to G_i(k_{\mathrm{sep}})) \subset (G_i)_k$$

und definieren $\mathcal{F}_i$ als den Zariski-Abschluss von $\mathcal{C}_i$ in $(G_i)_k$ und versehen ihn mit der reduzierten induzierten Schemastruktur. Er ist also nach dem Lemma geometrisch reduziert. Es ist klar, dass $\mathcal{C}_i$ als Bild eines Gruppenhomomorphismus selbst eine Gruppe ist. Deshalb ist $\mathcal{F}_i$ ein k-Untergruppenschema von $(G_i)_k$.

Wir definieren nun G_{i+1} als die Ausdehnung von $\mathcal{F}_i$ in G_i. Da Ausdehnungen und Produkte vertauschen (3.2/2(d)) ist G_{i+1} ein R-Gruppenschema und außerdem ist es nach Konstruktion flach. Aus der universellen Eigenschaft der Ausdehnung folgt, dass G_{i+1} die Ausdehnung von $\mathcal{F}_i$ in G_0 ist. Weiter erhalten wir aus der universellen Eigenschaft (induktiv), dass die Abbildung

$$G_{i+1}(R^{\mathrm{sh}}) \to G_0(R^{\mathrm{sh}})$$

bijektiv ist. Hier benutzen wir das erste Mal die spezielle Wahl der $\mathcal{F}_i$. Denn diese garantiert, dass für jeden R^{sh}-wertigen Punkt $a : R^{\mathrm{sh}} \to G_0$ die Abbildung $\overline{a} : k_{\mathrm{sep}} \to G_0(k_{\mathrm{sep}})$ über $\mathcal{C}_0$, also auch $\mathcal{F}_0$, faktorisiert und wir $a_1 : R^{\mathrm{sh}} \to G_1$ erhalten. Dies kann man natürlich fortsetzen.

Lemma 1.9 *Sei $a_0 \in G_0(R^{\mathrm{sh}})$ und bezeichne a_i das eindeutige Urbild in $G_i(R^{\mathrm{sh}})$. Dann gilt*

$$\delta(a_i) \leq \max\{0, \delta(a_0) - i\}.$$

Beweis. Lemma 3.4/1 sagt aus, dass in jedem Schritt der Glattheitsdefekt echt sinkt, außer, wenn er bereits 0 ist. Allerdings brauchen wir die Voraussetzung, dass jedes $\mathcal{F}_i$ dabei $G_i(R^{\mathrm{sh}})$-zulässig ist.

Dazu gibt es zwei Punkte zu überprüfen. Zum Ersten muss

$$\mathrm{Bild}(G_i(R^{\mathrm{sh}}) \to \mathcal{F}_i(k_{\mathrm{sep}})) \supseteq \mathcal{C}_i$$

schematisch dicht in $\mathcal{F}_i$ sein. Dies ist aber klar nach Definition der $\mathcal{F}_i$.

Beim zweiten Punkt genügt es, zwei Dinge zu überprüfen. Erstens, dass $\mathcal{F}_i$ glatt über k ist. Da $\mathcal{F}_i$ aber geometrisch reduziert ist, ist $\mathcal{F}_i$ glatt, weil es ein k-Gruppenschema von endlichem Typ ist.

Zeitens ist zu zeigen, dass $\Omega_{G_i/R}|_{\mathcal{F}_i}$ lokal frei ist. Wegen [Hartshorne], II.8.10, ist $\Omega_{G_i/R}|_{(G_i)_k} = \Omega_{(G_i)_k/k}$. Nun sagt uns 4.4/2, dass $\Omega_{(G_i)_k/k} = p^*\epsilon^*\Omega_{(G_i)_k/k}$, wobei $p : (G_i)_k \to \mathrm{Spec}(k)$ der Strukturmorphismus und $\epsilon : \mathrm{Spec}(k) \to (G_i)_k$ der Einsschnitt ist. Damit ist aber klar, dass $\epsilon^*\Omega_{(G_i)_k/k}$ frei ist, da es ja ein $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)} = k$-Modul ist. Es folgt, dass

$$\Omega_{G_i/R}|_{\mathcal{F}_i} = p^*\epsilon^*\Omega_{(G_i)_k/k}|\mathcal{F}_i$$

frei ist. Übrigens zeigt diese Argumentation, dass die Bedingung (ii) von der Zulässigkeit so formuliert werden kann: “Kein nicht glatter k_{sep}-Punkt von Y_k (hier $\mathcal{F}_i$) hebt sich hoch zu einem Punkt in E (hier $G_i(R^{\mathrm{sh}})$).” Wir benutzen, dass es keine nicht-glatten Punkte in $\mathcal{F}_i$ gibt. Gäbe es doch so einen Punkt, dann wäre der lokale Ring von $\mathcal{F}_i$ dort reduziert, aber nicht geometrisch reduziert. Damit er sich nicht hochheben kann, muss er in $\mathcal{F}_i - \mathcal{C}_i$ liegen. $\square$

Da der Glattheitsdefekt beschränkt ist (3.3/3), gibt es also ein i, so dass $\delta(a) = 0$ für alle $a \in G_i(R^{\mathrm{sh}})$. Setze $G' := G_i$. Wir zeigen nun, dass G' die gewünschte Gruppenglättung ist.

Wegen 3.3/1 faktorisiert jeder R^{sh}-Punkt von G' über den glatten Ort von G', insbesondere also der Einsschnitt. Mit anderen Worten, G' ist glatt am Einsschnitt. Da G' als Ausdehnung flach ist, ist G' glatt.

Nun rechnen wir noch die universelle Eigenschaft der Gruppenglättung für G' nach. Sei Z ein glattes R-Schema zusammen mit einem R-Morphismus $\phi : Z \to G$. Wenn der induzierte Morphismus $Z_k \to G_k$ über $\mathcal{F}_i$ faktorisiert, folgt aus der universellen Eigenschaft der Ausdehnungen (induktiv), da Z als glattes Schema insbesondere flach ist, dass wir den gesuchten Morphismus $Z \to G_i = G'$ erhalten.

Nun zeigen wir noch, dass $Z_k \to G_k$ über $\mathcal{F}_i$ faktorisiert. Es ist zunächst klar, dass ϕ eine Abbildung

$$\mathrm{Bild}(Z(R^{\mathrm{sh}}) \to Z(k_{\mathrm{sep}})) \to \mathrm{Bild}(G(R^{\mathrm{sh}}) \to G(k_{\mathrm{sep}}))$$

induziert. Nach “Steffis Lemma” (2.3/5) ist die linke Menge schematisch dicht in Z_k, da Z glatt ist. Damit setzt sich diese Abbildung aber fort zu einem Morphismus, der auch von ϕ induziert wird, von Z_k zum schematischen Abschluss von der rechten Menge in G_k, das ist aber $\mathcal{F}_0$. Dies war für den ersten Schritt $G_1 \to G_0$ zu zeigen. Das Argument überträgt sich aber ganz analog auf die anderen Schritte bis $G_i = G'$.

Dies schließt den Beweis der Existenz der Gruppenglättung im lokalen Fall ab.

Anwendung auf Untergruppenschemata

Wir wiederholen ein Lemma aus Denis Vortrag. Im Buch ist das 1.2/5. Hier schreiben wir es in Worten hin. Zunächst führen wir die Notation

$$X_{(s)} := X \times_S \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$$

für $s \in S$ ein.

Lemma 1.10 *Sei S ein Basisschema und $s \in S$ ein Punkt.*

(a) Seien X, Y S-Schemata von endlicher Darstellung.

Dann setzt sich jeder Morphismus $X_{(s)} \to Y_{(s)}$ fort zu einem Morphismus $X \times_S S' \to Y \times_S S'$ für eine offene Menge $S' \subset S$, die s enthält. Je zwei solche Fortsetzungen (sagen wir auf S'_1 und S'_2) stimmen auf einer offenen Menge S' überein, die s enthält und selbst in S'_1 und S'_2 enthalten ist.

(b) *Sei $X_{(s)}$ ein $\mathcal{O}_{S,s}$-Schema von endlicher Darstellung. Dann gibt es eine offene Menge $S' \subset S$, die s enthält, und ein glattes S'-Schema endlicher Darstellung X, das $X_{(s)}$ fortsetzt.*

Korollar 1.11 *Sei S ein Dedekindschema mit Ring der rationalen Funktionen K. Gegeben sei ein S-Gruppenschema G, das Néron-Modell seiner generischen Faser sei.*

Dann besitzt jedes glatte K-Untergruppenschema H_K von G_K ein Néron-Modell.

Ist der schematische Abschluss $\overline{H}$ von H_K in G glatt, dann ist $\overline{H}$ das Néron-Modell von H_K.

Beweis. Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

<u>1. Schritt:</u> Sei H ein glattes S-Modell von H_K derart, dass $H_{(s)}$ eine Gruppenglättung von $\overline{H}_{(s)}$ an allen abgeschlossenen Punkten $s \in S$ ist. Wir zeigen nun, dass dann H bereits ein Néron-Modell von H_K ist. Dafür genügt es wegen 1.2/4 zu zeigen, dass $H_{(s)}$ ein Néron-Modell seiner generischen Faser ist für alle abgeschlossenen Punkte $s \in S$.

Wir rechnen die Néron-Eigenschaft von $H_{(s)}$ für einen beliebigen abgeschlossenen Punkt $s \in S$ nach. Setze $R := \mathcal{O}_{S,s}$. Sei also Z ein glattes R-Gruppenschema und $u_K : Z_K \to H_K$ ein gegebener K-Morphismus. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Z_K \arrow[rr, "u_K"] \arrow[d] & & H_K \arrow[r] \arrow[d] & G_K \arrow[d] \\
Z \arrow[r, dotted, "u"'] \arrow[rr, dotted, bend left, "\beta"] \arrow[rrr, dotted, bend right, "\alpha"'] & H_{(s)} \arrow[r] & \overline{H}_{(s)} \arrow[r] & G_{(s)}.
\end{tikzcd}$$

Zunächst gibt die Néron-Eigenschaft von $G_{(s)}$ die Existenz und Eindeutigkeit von α. Wegen der Definition des schematischen Abschlusses faktorisiert α aber über $\overline{H}_{(s)}$. Dies gibt uns das eindeutige β. Schließlich benutzen wir die universelle Eigenschaft der Gruppenglättung und erhalten, dass β über $H_{(s)}$ faktorisiert. Dies ist der gewünschte eindeutige Morphismus u, der u_K hoch hebt.

<u>2. Schritt:</u> Wir zeigen, dass es ein Schema H gibt, wie es im 1. Schritt benötigt wird.

Hier nehmen wir der Einfachheit halber an, dass S zusammenhängend ist (ansonsten muss man die Zusammenhangskomponenten einzeln betrachten).

Zunächst gilt, dass $\overline{H}$ auf einer offenen und dichten Menge $S' \subset S$ schon glatt ist. Denn das Bild der abgeschlossenen Menge der nicht-glatten Punkte unter dem Strukturmorphismus kann nur eine endliche Menge von Punkten in S treffen, die den generischen Punkt nicht enthält. An allen Punkten $s \in S'$ gilt, dass $\overline{H}_{(s)}$ bereits eine Gruppenglättung von sich selbst ist.

Sei $s \in S - S'$. Wähle eine Gruppenglättung $H'_{(s)} \to \overline{H}_{(s)}$ über $\mathcal{O}_{S,s}$. Dies wird durch die lokale Existenz der Gruppenglättungen ermöglicht.

Wende nun Lemma 1.10(b) an. Dann erhalten wir eine offene Menge $s \in S_s \subseteq S$ und ein glattes Schema $H_{(s)} \to S_s$, das $H'_{(s)}$ fortsetzt (d.h. wir haben einen Morphismus $(H_{(s)})_{(s)} \to \overline{H}_{(s)}$). Wegen des Teils (a) des gerade zitierten Lemmas erhalten wir eine Fortsetzung $H_{(s)} \to \overline{H} \times_S S_s$. Dabei haben wir die Menge S_s eventuell kleiner gemacht. Sie ist aber noch stets offen in S und enthält s.

Weiter folgt aus Teil (a) des Lemmas angewandt auf den generischen Punkt von S, dass $H_{(s)}$ und $\overline{H}_{(s)}$ auf einer offenen dichten Menge $S'' \subset S_s \cap S'$ übereinstimmen (denn der Isomorphismus auf der generischen Faser dehnt sich zu einem Morphismus auf einer offenen Umgebung aus - durch Weglassen endlich vieler Punkte erhält man dann auch die Isomorphie). Definiere $S'_s \subset S_s$, so dass $S'_s \cap (S - S'') = \{s\}$. Dann stimmen $H_{(s)} \times_{S_s} S'_s$ und $\overline{H} \times_S S'$ auf $S' \cap S'_s$ überein. Nun können wir die beiden Schemata zu einem glatten, separierten $S' \cup \{s\}$-Schema H_1 verkleben, so dass $(H_1)_{(s)} = H_{(s)}$ und $(H_1) \times_{S' \cup \{s\}} S' = \overline{H} \times_S S'$.

Wir bemerken, dass wir keine Eigenschaft von $\overline{H}$ über S' benutzt haben. Deshalb können wir dasselbe Verfahren nun auf H_1 anwenden mit einem Punkt aus $S - (S' \cup \{s\})$. Nach endlich vielen Schritten bricht dies ab und wir sind fertig. $\square$

Bemerkung 1.12 Im Buch wird behauptet, dass das Schema aus dem 2. Schritt bereits eine globale Gruppenglättung sei. Allerdings wird die universelle Eigenschaft nicht nachgerechnet. Diese sollte aber auch aus dem Lemma folgen, indem man die lokalen Morphismen auf eine offene dichte Menge ausdehnt und dann verklebt.

Weiter behauptet das Buch, dass globale Gruppenglättungen im allgemeinen nicht bestünden. Das obige Verfahren scheint aber für jedes S-Gruppenschema G mit glatter generischer Faser zu funktionieren, das über einer dichten offenen Menge $S' \subset S$ glatt ist. Was geht schief?

2 Basiswechsel und Abstieg

In diesem Abschnitt betrachten wir die folgende Fragestellung: Gegeben sei eine treuflache Ringerweiterung $R \to R'$ diskreter Bewertungsringe und G_K ein glattes K-Gruppenschema und G ein Néron-Modell von G_K über R.

Ist dann $G \times_R R'$ ein Néron-Modell von $G_{K'} = G_K \times_K K'$?

Beginnen wir mit einem Negativbeispiel.

Beispiel 2.1 Setze $R := \overline{\mathbb{F}_p}[[T]]$. Dann ist R ein strikt henselscher diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper $\overline{\mathbb{F}_p}$, Quotientenkörper $K := \overline{\mathbb{F}_p}((T))$ und Uniformisierender T. Die normalisierte Bewertung sei mit v bezeichnet. Betrachten wir

$$f := X + X^p + TY^p \in R[X, Y]$$

und das abgeschlossene R-Untergruppenschema

$$G := \mathrm{Spec}(R[X, Y]/(f)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R[X, Y]) = \mathbb{G}_{a,R} \times_R \mathbb{G}_{a,R}.$$

Es ist G offenbar von endlichem Typ über R, separiert und glatt, denn das Jacobi-Kriterium liefert

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}\right) = (1, 0).$$

Außerdem ist die natürliche Abbildung $G(R) \to G(K)$ bijektiv, wie wir nun ausrechnen. Sei also $(x,y) \in G(K)$, d.h. $x + x^p = -Ty^p$. Wenn $v(x) \geq 0$ gilt, dann ist offenbar $v(x + x^p) \geq 0$ und damit auch $v(y)$, also $(x,y) \in G(R)$. Nehmen wir nun an, dass $x = \frac{\tilde{x}}{T^r}$ mit $r > 0$ und $v(\tilde{x}) = 0$. Dann hat man

$$v(x + x^p) = v(\frac{\tilde{x}T^{r(p-1)} + \tilde{x}^p}{T^{rp}}) = pv(x).$$

Da aber die Bewertung $v(-Ty^p) = pv(y) + 1$ nicht durch p teilbar ist, führt die Annahme $v(x) < 0$ zu einem Widerspruch.

Nach 7.1/1 ist nun G das Néron-Modell von G_K.

Wir werden jetzt zur einer total verzweigten Erweiterung übergehen, nämlich $R' := \overline{\mathbb{F}_p}[[T^{1/p}]]$ mit $K' = \overline{\mathbb{F}_p}((T^{1/p}))$. Die Zuordnung $Z \mapsto X + T^{1/p}Y$ definiert einen Ringisomorphismus

$$K'[Z] \to K'[X,Y]/(f) = K'[X,Y]/(X + (X + T^{1/p}Y)^p),$$

denn $X + T^{1/p}Y$ liegt nicht in $(X + (X + T^{1/p}Y)^p)$ (wie man z.B. durch Betrachtung der Potenz von X sieht) und außerdem sind $X = -(X + T^{1/p}Y)^p$ und $Y = ((X + T^{1/p}Y) - X)T^{-1/p}$ im Bild. Somit erhalten wir einen Isomorphismus

$$G_{K'} \cong \mathbb{G}_{a,K'}.$$

Da die affine Gerade nicht beschränkt ist, hat $G_{K'}$ kein Néron-Modell über R'.

In diesem Beispiel geht also sogar die Existenz von Néron-Modellen bei einem verzweigten Basiswechsel verloren.

Einfach kann man das Folgende aussagen.

Satz 2.2 (Prop. 1.2/2(c)) *Die Bildung von Néron-Modellen vertauscht mit étalem Basiswechsel und mit dem Basiswechsel* $R \to R^{\mathrm{sh}}$.

Beweis. Sei $S' \to S$ ein étaler Morphismus von Dedekindschemata mit Ringen von rationalen Funktionen K bzw. K'.

Der entscheidende Punkt im Beweis ist, dass jedes glatte Schema $Y \to S'$ auch glatt als S-Schema ist via $Y \to S' \to S$. Dies ist bei verzweigtem Basiswechsel nicht mehr der Fall.

Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y_{K'} \arrow[r, "u_{K'}"] \arrow[d] & X_K \times_K K' \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d] & X_K \arrow[d] \\
Y \arrow[r, dotted, "u'"] \arrow[rr, dotted, bend left, "u"] \arrow[dr] & X \times_S S' \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & X \arrow[d] \\
& S' \arrow[r] & S.
\end{tikzcd}$$

Wegen der Glattheit von Y über S, gibt es den Morphismus u. Der Morphismus u' entsteht aus der universellen Abbildungseigenschaft des Faserproduktes $X \times_S S'$.

Der letzte Punkt folgt daraus, dass R^{sh} als injektiver Limes über alle étalen Erweiterungen (in einem gegebenen algebraischen Abschluss des Quotientenkörpers) entsteht. Will man nun die Néron-Eigenschaft für ein glattes R^{sh}-Schema Y nachrechnen, so gibt es um jeden Punkt von Y eine offene Umgebung, die bereits über einer étalen Erweiterung von R definiert ist. Aus der Néron-Eigenschaft dort erhält man jeweils einen Morphismus. Wiederum wegen der Néron-Eigenschaft stimmen die so erhaltenen Morphismen auf ihren Durchschnitten überein und kleben sich zu einem globalen zusammen. $\square$

Wir betrachten zunächst das Abstiegsverhalten von Néron-Modellen im allgemeinen Fall einer treuflachen Erweiterung $R \to R'$ diskreter Bewertungsringe. Wir können annehmen, dass $R^{\text{sh}} \to R'^{\text{sh}}$, denn ist $R \to S$ étale, dann auch $R' \to S \otimes_R R'$.

Satz 2.3 *Seien G_K ein glattes K-Gruppenschema, X_K ein K-Torseur von G_K und $X_{K'} := X_K \times_K K'$ sowie $G_{K'} := G_K \times_K K'$. Dann ist $X_{K'}$ ein K'-Torseur von $G_{K'}$. Dieser habe ein Néron-Modell X' über R'.*

Dann hat X_K ein Néron-Modell X über R und es gibt einen natürlichen Morphismus

$$X \times_R R' \to X',$$

den sogenannten Basiswechselmorphismus.

Beweis. Der Beweis der Existenz beruht einzig und allein darauf, dass die Beschränktheit von $X_{K'}(K'^{\text{sh}})$ in $X_{K'}$ die entsprechende Beschränktheit von $X_K(K^{\text{sh}})$ in X_K impliziert. Explizit sieht man dies wie folgt ein. Zunächst gibt uns 6.5/4 (Volkers Vortrag), dass $X_{K'}(K'^{\text{sh}})$ in $X_{K'}$ beschränkt ist. Weiter folgt aus 1.1/5, dass $X_K(K'^{\text{sh}})$ in X_K beschränkt ist. Da die $X_K(K^{\text{sh}}) \subset X_K(K'^{\text{sh}})$, folgt, dass auch $X_K(K^{\text{sh}})$ in X_K beschränkt ist. Wiederum 6.5/4 gibt uns die Existenz des Néron-Modells X von X_K über R.

Die Néron-Eigenschaft von X angewandt auf die Identität $X_K \times_K K' = X_{K'}$ gibt uns den Basiswechselmorphismus $X \times_R R' \to X'$. $\square$

Der Abstieg funktioniert also in dem Sinne, dass die Existenz der Néron-Modelle absteigt, der Basiswechselmorphismus allerdings kein Isomorphismus zu sein braucht. Im Beispiel oben haben wir gesehen, dass der "Aufstieg" im Allgemeinen nicht möglich ist. Wir werden nun sehen, dass hingegen Erweiterungen von Verzweigungsindex 1 den "Aufstieg" zulassen.

Definition 2.4 *Sei ein $f : R \to R'$ ein treuflacher lokaler Homomorphismus diskreter Bewertungsringe R, R' mit Uniformisierenden π bzw. π'. Die Erweiterung $R \to R'$* hat Verzweigungsindex e, *wenn*

(i) $(f(\pi)) = (\pi'^e)$ *und*

(ii) der induzierte Homomorphismus $R/(\pi) \to R'/(\pi')$ eine separable Körpererweiterung ist.

Im Vergleich zu der Definition der Unverzweigtheit einer Erweiterung $R \to R'$ sind bei der Definition von Verzweigungsindex 1 zwei Forderungen wesentlich abgeschwächt worden. Nämlich zum Ersten, dass die Restklassenkörpererweiterung hier nicht mehr endlich zu sein braucht. Zum Zweiten braucht der Homomorphismus $R \to R'$ nicht von endlicher Darstellung zu sein. Letzteres erlaubt uns $\mathbb{Z}_{(p)} \to \mathbb{Z}_p$ zu betrachten bzw. ganz allgemein zur Komplettierung überzugehen.

Lemma 2.5 *Sei $R \to R'$ eine Erweiterung diskreter Bewertungsringe von Verzweigungsindex* 1 *und sei X_K ein glattes K-Schema.*

(a) Zu jedem Punkt $a_K \in X_K(K')$ existiert ein glattes R-Modell $\tilde{X}$ von X_K, so dass a_K im Bild der natürlichen Abbildung $\tilde{X}(R') \to X_K(K')$ ist.

(b) Hat X_K ein Néron-Modell X über R, dann ist die natürliche Abbildung $X(R') \to X_K(K')$ surjektiv.

Beweis. (a) ist ein Spezialfall von 3.6/4. Dort wird $\tilde{X}$ aus einer endlichen Folge von Ausdehnungen konstruiert. Laut Buch übertrügen sich alle Beweise aus dem Kapitel Glättungen, wo mit R^{sh} gearbeitet wurde, auf den Fall R', insbesondere der Beweis des Satzes über Glättungen 3.3/5. Daraus könne man dann 3.6/4 schließen. Dieses habe ich nicht überprüft.

(b) Gegeben sei $a_K \in X_K(K')$. Wir wählen nach Teil (a) ein R-Modell $\tilde{X}$ von X_K, derart dass $\tilde{X}$ eine Hochhebung $\tilde{a}$ von a_K besitzt. Die Néron-Eigenschaft von X gibt uns (angewandt auf die Identität $\tilde{X}_K \to X_K$) einen R-Morphismus $\phi : \tilde{X} \to X$. Der Punkt $a := \phi \circ \tilde{a} \in X(R')$ ist ein Urbild von a_K. □

Aus diesem Lemma werden wir nun den Hauptsatz über lokalen Verzweigungsindex-1-Basiswechsel schließen. Philosophisch können wir sagen, dass die Eigenschaft "Verzweigungsindex 1" uns Glättungen liefert, genauso wie im étalen Fall, der das ganze Semester lang benutzt wurde, um z.B. die Existenz von Néron-Modellen zu zeigen. Deshalb können wir auch gute Eigenschaften der Néron-Modelle erwarten.

Theorem 2.6 *Sei $R \to R'$ eine Erweiterung diskreter Bewertungsringe von Verzweigungsindex* 1*. Zum Beispiel kann R' die Komplettierung von R sein. Seien ferner G_K ein glattes K-Gruppenschema von endlichem Typ, X_K ein K-Torseur von G_K und $X_{K'} := X_K \times_K K'$ sowie $G_{K'} := G_K \times_K K'$.*

Dann hat X_K genau dann ein Néron-Modell X über R, wenn $X_{K'}$ ein Néron-Modell X' über R' hat. Für diese gilt $X \times_R R' \cong X'$.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass R und R' strikt henselsch sind. Dann sagt uns Lemma 2.5(b), dass

$$X \times_R R'(R') = X(R') \twoheadrightarrow X_K(K') = X_K \times_K K'(K')$$

surjektiv ist. Wegen Theorem 7.1/1 folgt, dass $X \times_R R'$ das Néron-Modells von $X_{K'}$ ist.

Seien nun R und R' nicht notwendig strikt henselsch. Sei X ein Néron-Modell von X_K über R. Wegen Satz 2.2 ist $X_{R^{\mathrm{sh}}}$ das Néron-Modell von $X_{K^{\mathrm{sh}}}$ über R^{sh}. Nach dem gerade Bewiesenen ist nun $X_{R'^{\mathrm{sh}}}$ das Néron-Modell von $X_{K'^{\mathrm{sh}}}$ über R'^{sh}. Nach Satz 2.3 hat also $X_{K'}$ ein Néron-Modell X' über R'. Es gilt aber wiederum

$$(X \times_R R') \times_{R'} R'^{\mathrm{sh}} \cong X' \times_{R'} R'^{\mathrm{sh}},$$

wobei der Isomorphismus vom Basiswechselmorphismus $(X \times_R R') \to X'$ induziert ist. Wegen der Treuflachheit von $R' \to R'^{\mathrm{sh}}$ ist dieser bereits ein Isomorphismus. $\square$

Globale Variante

Wir erinnern zunächst an die Weil-Restriktion. Sei $h : S' \to S$ ein Morphismus von Schemata und X' ein S'-Schema. Dann ist *die Weil-Restriktion* $\mathcal{R}_{S'/S}(X')$ *von* X' der Funktor

$$\begin{array}{ccc} (\text{Schemata}/s)^{\circ} & \to & (\text{Mengen}) \\ T & \mapsto & X'(T \times_S S'). \end{array}$$

Ist dieser darstellbar, dann bezeichnen wir das zugehörige S-Schema auch mit $\mathcal{R}_{S'/S}(X')$. Es gilt dann also für alle S-Schemata T, dass

$$\mathcal{R}_{S'/S}(X')(T) = X'(T \times_S S').$$

Theorem 2.7 *Sei $S' \to S$ ein flacher und endlicher Morphismus von Dedekindschemata mit Ringen von rationalen Funktionen K bzw. K'. Ferner seien G_K ein glattes K-Gruppenschema von endlichem Typ, $G_{K'} = G_K \times_K K'$ und G' ein Néron-Modell von $G_{K'}$ über S'.*

Dann gelten:

(a) Die Weil-Restriktionen $\mathcal{R}_{S'/S}(G')$ und $\mathcal{R}_{K'/K}(G_{K'})$ existieren (d.h. sind darstellbar).

(b) Die Weil-Restriktion $\mathcal{R}_{S'/S}(G')$ ist ein Néron-Modell der Weil-Restriktion $\mathcal{R}_{K'/K}(G_{K'})$.

(c) Das K-Gruppenschema G_K ist abgeschlossenes K-Untergruppenschema von $\mathcal{R}_{K'/K}(G_{K'})$ und hat als solches ein Néron-Modell über S.

Beweis. Der Beweis von (a) und (b) umfasst das ganze Kapitel 7.6. Für (c) verwendet man Kor. 1.11. $\square$

3 Isogenien und Néron-Modelle

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wann sich eine Isogenie von glatten K-Gruppenschemata auf deren Néron-Modelle fortsetzt.

Satz 3.1 *Die Kategorie der kommutativen Gruppenschemata über einem Körper ist abelsch.*

Beweis. [vdG-M], Theorem 4.41. $\square$

Definition 3.2 *(a) Seien G, G' kommutative Gruppenschemata von endlichem Typ über einem Körper k. Ein Morphismus $f : G \to G'$ von k-Gruppenschemata heißt* Isogenie*, falls f endlich ist und $f(G^0) = G'^0$. (Vergleiche die Definition für abelsche Varietäten: Isogenien sind surjektiv (abelsche Varietäten sind zusammenhängend) und haben einen endlichen Kern.)*

(b) Seien nun G, G' kommutative Gruppenschemata über einem Basisschema S. Dann heißt ein Morphismus $f : G \to G'$ von S-Gruppenschemata Isogenie*, falls für alle $s \in S$ der Morphismus $f_s : G_s \to G'_s$ eine Isogenie ist, wobei $G_s = G \times_S k(s)$ und analog für G'_s die Faser über s bezeichnet.*

Definition 3.3 *(a) Sei G ein kommutatives, glattes k-Gruppenschema von endlichem Typ über einem Körper k. Dann heißt G* halb-abelsch*, falls es eine exakte Folge von k-Gruppenschemata*

$$0 \to T \to G^0 \to A \to 0$$

gibt mit einer abelschen Varietät A über k und einem (nicht notwendig entfalteten) affinen Torus T über k.

(b) Sei nun G ein kommutatives, glattes S-Gruppenschema von endlichem Typ über einem Basisschema S. Dann heißt G halb-abelsch*, falls alle Fasern G_s (für $s \in S$ wie in der vorstehenden Definition) halb-abelsche Gruppenschemata sind.*

Bemerkung 3.4 Sei k ein Körper und $\overline{k}$ ein algebraischer Abschluss. Sei ferner G ein kommutatives, glattes k-Gruppenschema von endlichem Typ.

Dann ist G genau dann halb-abelsch, wenn $G_{\overline{k}}$ halb-abelsch ist.

Beweis. Siehe Buch und SGA III, Band 2. □

Kommen wir nun zu wichtigen Beispielen von Isogenien, den l-Multiplikationen. Dabei zeigt sich auch die Bedeutung der Definition von halb-abelschen Gruppenschemata. Zunächst schieben wir ein Lemma für den Fall kommutativer, glatter Gruppenschemata über einem Körper ein.

Lemma 3.5 *Sei $f : G \to G'$ ein Morphismus von kommutativen, glatten k-Gruppenschemata von endlichem Typ. Dabei gelte $\dim(G) = \dim(G')$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) f ist eine Isogenie.

(ii) f ist flach.

(iii) $f(G^0) = G'^0$.

(iv) $\ker(f)$ ist endliches k-Gruppenschema.

(v) f ist quasi-endlich. (D.h. f ist von endlichem Typ und für alle $g' \in G'$ ist $f^{-1}(g') = G \times_{G'} \{g'\}$ endlich über $k(g')$. Das ist gleichbedeutend damit, dass $f^{-1}(g')$ aus endlich vielen Punkten besteht.)

(vi) f *ist endlich.*

Beweis. Siehe SGA III, Band 1. $\square$

Satz 3.6 *Sei S ein Schema und G ein kommutatives, glattes S-Gruppenschema von endlichem Typ.*

(a) *Falls G halb-abelsch ist, dann ist die l-Multiplikation $l_G : G \to G$ quasi-endlich und flach, und somit eine Isogenie. Insbesondere ist $\ker(l_G) =: {}_lG =: G[l]$ ein quasi-endliches und flaches S-Gruppenschema.*

(b) *Falls für kein $s \in S$ die Charakteristik von $k(s)$ die natürliche Zahl l teilt, dann ist die l-Multiplikation $l_G : G \to G$ étale, und somit eine Isogenie. Insbesondere ist $\ker(l_G) = {}_lG = G[l]$ ein étales S-Gruppenschema.*

Beweis. (a) Die Flachheit kann nach 2.4/2 auf den Fasern getestet werden, weshalb wir annehmen, dass $S = \mathrm{Spec}(k)$ mit einem Körper k. Zunächst ist klar, dass

$$l_{\mathbb{G}_m} : \mathbb{G}_{m,k} \to \mathbb{G}_{m,k}$$

surjektiv ist. Dies folgt zum Beispiel mittels Lemma 3.5, da die Quasi-Endlichkeit klar ist. Ebenso ist bekannt (siehe z.B. [vdG-M], 5.9), dass l_A auf abelschen Varietäten surjektiv ist (da es eine Isogenie ist). Nun erhalten wir mittels des Schlangenlemmas (wir sind in einer abelschen Kategorie) aus der exakten Folge zu G^0, dass $l_G(G^0) = G^0$ ist, weshalb Lemma 3.5 impliziert, dass l_G flach ist. Aus der Quasi-Endlichkeit der Fasern über S folgt sofort die Quasi-Endlichkeit, da diese über Fasern definiert ist (konkret mit $y \in Y$ und $s \in S$ mit $y \mapsto s$ haben wir $X_y = (X_s)_y$).

(b) Man reduziert wieder auf den Fall $S = \mathrm{Spec}(k)$. Bei der Flachheit darf man das wieder wegen 2.4/2 und die Unverzweigtheit ist ohnehin über die Fasern definiert. Der Morphismus $l_{G_s} : G_s \to G_s$ ist genau dann étale, wenn die induzierte $k(s)$-lineare Abbildung der Tangentialräume ein Isomorphismus ist (siehe 2.2/10). Letzteres ist aber klar, da diese Abbildung Multiplikation mit l ist (das kann man z.B. auf den $k(s)[\epsilon]/(\epsilon^2)$-Punkten testen). $\square$

Lemma 3.7 *Sei S ein Schema und H ein quasi-endliches S-Gruppenschema von endlichem Typ.*

(a) *Falls $S = \mathrm{Spec}(k)$ mit einem Körper k, dann ist H bereits ein endliches S-Gruppenschema.*

(b) *Wir nehmen nun an, dass $S = \mathrm{Spec}(R)$ mit einem henselschen diskreten Bewertungsring R und dass $H \to S$ separiert ist. Dann existiert ein offenes und abgeschlossenes, endliches S-Untergruppenschema H' von H und ein offenes und abgeschlossenes S-Schema $H'' \subset H$ mit leerer spezieller Faser, so dass H die disjunkte Vereinigung von H' und H'' ist.*

Beweis. (a) ist trivial, da die Definition der Quasi-Endlichkeit ist, dass alle Fasern endlich sind. In diesem Fall ist der Morphismus aber seine eigene Faser.

(b) [Milne], Thm. 4.2 $(a) \Leftrightarrow (c)$. $\square$

Satz 3.8 *Sei R ein diskreter Bewertungsring und $l \in \mathbb{N}$, so dass die Charakteristik von k nicht l teilt. Sei G ein glattes, kommutatives R-Gruppenschema von endlichem Typ. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$G[l](R^{\mathrm{sh}}) \to G[l](k_{\mathrm{sep}})$$

bijektiv.

Beweis. Wir können gleich annehmen, dass R strikt henselsch ist. Teil (b) des oben stehenden Satzes ergibt, dass $G[l]$ ein étales Gruppenschema über R ist. Zerlegen wir $G[l]$ wie in der Bemerkung in Teile H' und H'', so ist klar, dass $H''(k_{\mathrm{sep}}) = \emptyset = H''(R^{\mathrm{sh}})$. Nach 2.3/4 ist aber nun $H = \coprod \mathrm{Spec}(R)$, weshalb die Aussage klar ist. □

Bemerkung 3.9 Einige Fakten zu kommutativen, endlichen Gruppenschemata H über einem Körper k:

(a) Der Rang von $H = \mathrm{Spec}(A)$ ist per Definition $\dim_k(A)$. Ist H Kern einer Isogenie f, so setzt man $\deg(f)$ gleich dem Rang von H.

(b) H ist étale, wenn die Charakteristik von k nicht den Rank von H teilt.

(c) Ist H zusammenhängend, dann ist sein Rang eine Potenz der Charakteristik von k.

(d) Ist l ein Vielfaches des Ranges von H, dann ist $l_H : H \to H$ der Nullmorphismus.

Lemma 3.10 *Sei $f : G \to G'$ eine Isogenie zwischen glatten und zusammenhängenden Gruppenschemata von endlichem Typ über einem Körper k. Wir nehmen an, dass G halb-abelsch ist, oder dass die Charakteristik von k nicht $l := \deg(f)$ teilt.*

Dann gibt es eine Isogenie $g : G' \to G$, so dass

$$G \xrightarrow{f} G' \xrightarrow{g} G$$

gleich der l-Multiplikation auf G ist.

Beweis. Nach Voraussetzung und Lemma 3.5 ist $\ker(f)$ ein endliches Gruppenschema von Rang l über k. Der oben stehende Fakt bedeutet somit, dass $\ker(f) \subseteq \ker l_G$. Da G zusammenhängend und f eine Isogenie ist, ist diese surjektiv und der Homomorphiesatz gibt $G' \cong G/\ker(f)$. Nun betrachten wir

$$G \xrightarrow{f} G' \cong G/\ker(f) \xrightarrow{\text{proj}} G/G[l] \xrightarrow{l_G} G.$$

Die Hintereinanderausführung dieser Abbildungen ist l_G. Als g können wir also die Teilabbildung $G' \to G$ nehmen. Diese ist surjektiv, da l_G dies bereits ist. Nach Lemma 3.5 ist g also eine Isogenie. □

Satz 3.11 *Sei R ein diskreter Bewertungsring. Seien G_K und G'_K glatte, kommutative und zusammenhängende K-Gruppenschemata von endlichem Typ, die Néron-Modelle G, G' haben.*

Sei $f_K : G_K \to G'_K$ eine Isogenie. Wir nehmen an, dass entweder G halb-abelsch ist, oder dass die Charakteristik von k nicht den Grad $l = \deg(f_K)$ teilt. Dann setzt sich f fort zu einer Isogenie $f : G \to G'$.

Darüberhinaus gibt es eine Isogenie $g : G' \to G$, so dass

$$G \xrightarrow{f} G' \xrightarrow{g} G$$

gleich der l-Multiplikation auf G ist.

Beweis. Die Néron-Eigenschaft ergibt unmittelbar die Existenz von Morphismen f und g, so dass $g \circ f = l_G$ ist, denn l_{G_K} hebt sich offenbar eindeutig zu l_G hoch. Nun ist zu prüfen, dass f und g Isogenien sind. Da die Definition über die Fasern erfolgte, reicht es nun zu zeigen, dass wenn

$$G_s \xrightarrow{f_s} G'_s \xrightarrow{g_s} G_s$$

gleich der l-Multiplikation auf G_s ist, schon f_s und g_s Isogenien sind. Dabei ist s der abgeschlossene Punkt von $\mathrm{Spec}(R)$.

Daraus, dass $\dim G_K = \dim G'_K$ ist, schließt man wegen der Glattheit $G \to \mathrm{Spec}(R)$, dass $\dim G_s = \dim G'_s$ (siehe [Hartshorne], Prop. 10.1(b)). Somit folgt wegen der Surjektivität von g_s und der Quasi-Endlichkeit von f_s aus Lemma 3.5, dass beide bereits Isogenien sind. □

Korollar 3.12 *Sei R ein diskreter Bewertungsring. Seien ferner G_K und G'_K abelsche Varietäten mit Néron-Modellen G, G' und sei $f_K : G_K \to G'_K$ eine Isogenie.*

Dann ist G genau dann halb-abelsch, wenn G' halb-abelsch ist.

Beweis. Wegen der jeweiligen Halb-Abelschheit setzt sich nach vorausgegangenem Satz jede Isogenie auf die Néron-Modelle fort. Es genügt damit zu zeigen, dass das Bild eines halb-abelschen R-Gruppenschemas selbst halb-abelsch ist. Dies folgt aber daraus, dass sowohl ein Torus als auch eine abelsche Varietät modulo einem abgeschlossenen endlichen Gruppenschema wieder ein Torus bzw. eine abelsche Varietät ist. □

4 Halb-abelsche Reduktion

Definition 4.1 *Sei S ein Dedekindschema und G ein glattes und zusammenhängendes S-Gruppenschema von endlichem Typ.*

(a) G hat abelsche Reduktion *bei einem abgeschlossenen Punkt $s \in S$, wenn G^0_s eine abelsche Varietät ist.*

(b) G hat halb-abelsche Reduktion *bei einem abgeschlossenen Punkt $s \in S$, wenn G^0_s ein halb-abelsches Gruppenschema ist.*

(c) *Ist G ein Néron-Modell von G_K, dann hat G_K (halb-)abelsche Reduktion bei s, wenn G diese hat. Das ist dasselbe wie zu fordern, dass $G \times_S \mathcal{O}_{S,s}$ (halb-)abelsche Reduktion hat.*

(d) *Sei A_K eine abelsche Varietät über K. Dann hat A_K bei einem geschlossenen Punkt $s \in S$* potentiell (halb-)abelsche Reduktion*, wenn es eine endliche Galoiserweiterung $L|K$ gibt, derart dass das Néron-Modell von A_L über der Normalisierung S' von S in L (halb-)abelsche Reduktion bei allen Punkten von S' über s hat.*

Theorem 4.2 *Sei S ein Dedekindschema mit Ring der rationalen Funktionen K. Jede abelsche Varietät über K hat potentiell halb-abelsche Reduktion bei allen abgeschlossenen Punkten s von S.*

Beweis. Ohne Beweis. □

Lemma 4.3 *Sei $0 \to A'_K \to A_K \to A''_K \to 0$ eine exakte Folge von abelschen Varietäten über K (Ring der rationalen Funktionen eines Dedekindschemas S).*

Dann hat A_K genau dann (halb-)abelsche Reduktion bei einem $s \in S$, wenn A'_K und A''_K diese haben.

Beweis. Es folgt aus Poincarés Satz zur vollständigen Reduktion, dass es eine Isogenie

$$A_K \to A'_K \times A''_K$$

gibt. Der Fall halb-abelscher Reduktion folgt direkt aus Korollar 3.12. Im Falle abelscher Reduktion genügt es zu zeigen, dass das Bild einer abelschen Varietät unter einer Isogenie wiederum eine abelsche Varietät ist, bzw., dass der Quotient einer abelschen Varietät nach einem endlichen abgeschlossenen Unterschema wiederum eine abelsche Varietät derselben Dimension ist. Dies kann man z.B. in [vdG-M] nachlesen. □

A Anhang: Benötigte Definitionen und Sätze

A.1 S-rationale Morphismen

- Sei $X \to S$ ein Morphismus von Schemata. Ein offenes Unterschema $U \subset X$ heißt *S-dicht*, wenn für alle $s \in S$ die Faser $U_s = U \times_S \mathrm{Spec}(k(s))$ Zariski-dicht liegt in der Faser $X_s = X \times_S \mathrm{Spec}(k(s))$.

- Ein *S-rationaler Morphismus* $f : X \cdots > Y$ von S-Schemata ist eine Äquivalenzklasse von S-Morphismen $U \to Y$, wobei die U S-dicht sind.

A.2 Schematisches Bild

- Sei $f : X \to Y$ ein quasi-kompakter und quasi-separierter Morphismus von Schemata. Das *schematische Bild von f* ist das kleinste abgeschlossene Unterschema $Z \subseteq Y$, derart dass das

Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & Y \\ & Z \arrow[u] \end{tikzcd}$$

wohl definiert ist und kommutiert. Ist X reduziert, so ist Z der Zariski-Abschluss von $f(X)$ in Y versehen mit der reduzierten induzierten Struktur.

- Die zu Z gehörige Idealgarbe ist gegeben als der Kern von $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$. Im affinen Fall ist dies gerade der Homomorphiesatz (ein Homomorphismus faktorisiert über seinen Kern, und über kein größeres Ideal).

- Ist $X \subset Y$ Unterschema, so heißt das schematische Bild der Inklusion auch der *schematische Abschluss von X in Y*.

A.3 Bewertungstheoretische Kriterien

Sei $Y \to S$ von endlichem Typ und S Noethersch.

Wenn sich für jeden diskreten Bewertungsring R mit Quotientenkörper K jeder K-Punkt von Y (über S) auf höchstens eine Weise zu einem R-Punkt von Y fortsetzt, dann ist $Y \to S$ separiert.

Existiert zusätzlich die für jeden K-Punkt eine R-Fortsetzung, dann ist $Y \to S$ sogar eigentlich.

Im Seminar betrachten wir die Fortsetzungseigenschaft für Punkte mit R étale über S. Also eine schwächere Eigenschaft.

A.4 Diskrete Bewertungsringe, Henselisierung etc.

- Ein Homorphismus lokaler Ringe $f : A \to B$ heißt *lokal*, wenn $f^{-1}\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A$.

  Der Punkt ist, dass dann und nur dann die induzierte Abbildung der Restklassenkörper $A/\mathfrak{m}_A \to B/\mathfrak{m}_B$ existiert. Das Standardbeispiel eines nicht-lokalen Homomorphismus ist $\mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

- Ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe $f : A \to B$, der von endlicher Darstellung ist, heißt *unverzweigt*, wenn gelten:

  (i) $f(\mathfrak{m}_A)B = \mathfrak{m}_B$ und

  (ii) der induzierte Homomorphismus $A/\mathfrak{m}_A \to B/\mathfrak{m}_B$ ist eine **endliche** separable Körpererweiterung.

  Die Bedingung (i) impliziert übrigens bereits, dass f ein lokaler Homomorphismus ist: $\mathfrak{m}_A \subseteq f^{-1}(f(\mathfrak{m}_A)) = f^{-1}(\mathfrak{m}_B)$ (die andere Inklusion ist klar). Eine andere Formulierung der Bedingung (i) ist

  $$(f(\pi_A)) = (\pi_B)$$

  im Falle diskreter Bewertungsringe.

Wegen Prop. 2.2/2 ist $f : A \to B$ genau dann unverzweigt, wenn $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ unverzweigt ist. Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, der von endlicher Darstellung ist, dann ist f genau dann unverzweigt, wenn für alle $x \in X$ der Homomorphismus $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ein unverzweigter Homomorphismus (lokaler Ringe) ist.

- Ein flacher lokaler Homomorphismus $f : A \to B$ diskreter Bewertungsringe *hat Verzweigungsindex* 1, wenn

  (i) $f(\pi_A) = \epsilon\pi_B$ für ein $\epsilon \in B^\times$ und

  (ii) der induzierte Homomorphismus $A/\mathfrak{m}_A \to B/\mathfrak{m}_B$ eine separable Körpererweiterung ist.

- Der erste Unterschied ist, dass die Endlichkeitsforderung fallen gelassen wurde. Damit ist $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[\zeta_n^\infty]$ für $p \nmid n$ eine Erweiterung von Verzweigungsindex 1.

  Als zweites wurde auf die endliche Darstellung verzichtet. Damit ist auch $\mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$, bzw. die Komplettierung eines diskreten Bewertungsringes im allgemeinen, ein Morphismus von Verzweigungsindex 1.

- Ganz explizit: Unverzweigt und flach bedeutet étale (also insbesondere endliche Darstellung und endliche Restklassenkörpererweiterung). Obwohl $\mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ (treu-)flach und von Verzweigungsindex 1 ist, ist dies kein étaler Morphismus!

- Sei ein flacher lokaler Homomorphismus $f : A \to B$ diskreter Bewertungsringe gegeben. Dieser *hat Verzweigungsindex* e, wenn

  (i) $f(\pi_A) = \epsilon\pi_B^e$ für ein $\epsilon \in B^\times$ und

  (ii) der induzierte Homomorphismus $A/\mathfrak{m}_A \to B/\mathfrak{m}_B$ eine separable Körpererweiterung ist.

- Sei $t \geq 2$ eine ganze Zahl. Man kann einem diskreten Bewertungsring A wie folgt einen Betrag zuordnen:

  $$|\epsilon\pi_A^r| = t^{-r}.$$

  Ist $f : A \to B$ eine Erweiterung diskreter Bewertungsringe mit endlichem Verzweigungsindex e, so kann man durch

  $$|\epsilon\pi_A^r|_A = t^{-er} \quad \text{und} \quad |\epsilon'\pi_B^{r'}|_B = t^{-r'}$$

  miteinander verträgliche Beträge definieren. Es gilt nämlich:

  $$|\epsilon\pi_A^r|_A = t^{-er} = |f(\epsilon)f(\pi_A)^r|_B.$$

- Sei R ein diskreter Bewertungsring. Dann ist jede étale lokale Erweiterung $R \to S$ wiederum ein diskreter Bewertungsring.

- Die Erweiterungen $R \to R^h \to R^{\mathrm{sh}}$ sind treuflach für jeden lokalen Ring R (siehe 2.4/9).

  Der Verzweigungsindex ist 1 (siehe S. 50 oben).

  Die strikte Henselisierung eines lokalen Ringes kann gesehen werden als der induktive Limes über Paare (S, α), wobei $R \to S$ eine lokale étale R-Algebra und $\alpha : S \to k^s$ ein R-Algebra-Homomorphismus ist. Dabei bezeichnet k^s einen separabelen Abschluss des Restklassenkörpers von R. Siehe S. 7 unten.

- Sei A ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Die Henselisierung von A erhält man als Durchschnitt der Komplettierung $\hat{A}$ mit $\overline{K}$ (siehe [Liu], S. 360).

Satz A.5 (Prop. 2.3/5, "Steffis Lemma") *Sei R ein lokaler Henselscher Ring mit Restklassenkörper k und X ein glattes R-Schema. Dann ist der kanonische Morphismus*

$$X(R) \to X(k)$$

surjektiv. Ist R strikt Henselsch, dann ist die Menge

$$\{x \in X_k(k) |\ x \textit{ hebt sich nach } X(R) \textit{ hoch } \} = \mathrm{Bild}(X(R) \to X_k(k))$$

dicht in X_k.

A.6 Dedekingschemata und Erweiterungseigenschaft

- Ein *Dedekindschema* ist ein noethersches, normales Schema von Dimension kleiner gleich 1 (siehe 1.1).

- Sei S ein Dedekindschema. Wenn K der Ring der rationalen Funktionen auf S ist (S braucht nicht zusammenhängend zu sein), dann heißt $\mathrm{Spec}(K)$ das *Schema der generischen Punkte von S*. Genauso heißt für ein S-Schema X das Schema X_K das *Schema der generischen Punkte von X*.

- Sei S ein Dedekindschema, $X \to S$ ein Schema und $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt. Dann erfüllt s die *Erweiterungseigenschaft étaler Punkte (EP)*, wenn die kanonische Abbildung $X(R') \to X_K(\mathrm{Quot}(R'))$ surjektiv ist für alle étalen lokalen $\mathcal{O}_{S,s}$-Algebren R' (siehe 1.1/1). (Die Abbildung ist auch injektiv, falls $X \to S$ separiert ist.)

  Die Eigenschaft EP kann für $R' = R^{\mathrm{sh}}$ getestet werden (siehe S. 7 unten).

  Jedes eigentliche Schema $X \to S$ erfüllt EP wegen des bewertungstheoretischen Kriteriums für Eigentlichkeit.

A.7 Beschränktheit

Sei $X \to S = \mathrm{Spec}(R)$ mit einem diskreten Bewertungsring R. Sei $R \to R'$ eine treuflache Erweiterung diskreter Bewertungsringe. Bezeichne $K = \mathrm{Quot}(R)$ und $K' = \mathrm{Quot}(R')$.

- Ein K'-Punkt x von $\mathbb{A}^n_K$ ist ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ in K'^n. Eine Teilmenge $E \in \mathbb{A}^n_K(K')$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $C > 0$ gibt, derart dass $|x_i| \leq C$ für alle $x \in E$ und alle $i = 1, \ldots, n$. Dabei bezeichnet $|\cdot|$ einen Absolutbetrag von K', der einen gegebenen Betrag von K fortsetzt. Siehe 1.1/2.

- Nimm an, dass $X_K \to K$ von endlichem Typ ist. Sei $E \subset X_K(K')$ eine Teilmenge.

  Ist X_K affin, so heißt E *beschränkt in* X_K, wenn $X_K \subseteq \mathbb{A}^n_K$ ein abgeschlossenes Unterschema ist, derart dass das Bild von E in $\mathbb{A}^n_K(K')$ eine abgeschlossene Teilmenge ist.

  Im allgemeinen heißt E *beschränkt in* X_K, wenn X_K eine endliche offene, affine Überdeckung $U_1, \ldots, U_r$ und E eine Zerlegung $E = \bigcup E_i$ besitzt, so dass E_i eine beschränkte Teilmenge von $U_i(K')$ ist für alle $i = 1, \ldots, r$.

- Beschränktheit ist unabhängig von der Wahl der affinen Überdeckung (1.1/3).

  Scheinbar hängt die Definition aber ab von der Wahl der Bewertungsringe (siehe S. 9 oben). Was bedeutet dies konkret? Kann eine beschränkte Teilmenge $E \subset X_K(K')$ aufgefasst als Teilmenge von $X_K(K'')$ mit $K' \to K''$ treuflache Erweiterung von diskreten Bewertungsringen nicht mehr beschränkt sein???? Das scheint zu bedeuten, dass “der Verzweigungsindex unendlich ist”, also dass die Trägheitsgruppe unendlich ist (das kann natürlich auftreten).

  Die Definition hängt ab von K', obwohl das nicht in der Notation zum Ausdruck kommt. Eigentlich doch, denn $E \subseteq X_K(K')$. Also, ???

- Das Bild einer beschränkten Menge unter einem K-Morphismus (von Schemata von endlichem Typ über K) ist wiederum beschränkt (siehe 1.1/4).

- $E \subseteq X_K(K')$ ist genau dann beschränkt, wenn $E' \subseteq X_{K'}(K')$ beschränkt ist. Hierbei entsteht E' wie folgt. Zu $x : \mathrm{Spec}(K') \to X_K$ erhält man aus der universellen Abbildungseigenschaft des Faserproduktes $X_{K'} = X_K \times_{\mathrm{Spec}\, K} \mathrm{Spec}(K')$ einen Morphismus $\mathrm{Spec}(K') \to X_{K'}$. Diesen Prozess wenden wir auf jeden Punkt $x \in E$ an und nennen die enstandene Menge E'. Siehe 1.1/5.

- Wenn $X_K \to \mathrm{Spec}(K)$ eigentlich ist, dann ist jede Teilmenge von $X_K(K')$ beschränkt in X_K. Siehe 1.1/6.

- Sei $X_K \to \mathrm{Spec}(K)$ von endlichem Typ. Dann sind äquivalent:

  (a) $X_K(K^{\mathrm{sh}})$ ist beschränkt in X_K.

  (b) Es gibt ein R-Modell X von X_K von endlichem Typ, das EP erfüllt.

Siehe 1.1/7. Das so erhaltene Schema ist im allgemeinen nicht separiert.

A.8 Néron-Modelle

Sei hier S ein Dedekindschema und K der Ring der rationalen Funktionen.

- Sei $X_K \to \mathrm{Spec}(K)$ ein glattes und separiertes Schema von endlichem Typ.

  Ein S-Modell X von X_K heißt *Néron-Modell von* X_K, wenn es glatt, separiert und von endlichem Typ über S ist und die folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt:

$$\begin{tikzcd} Y_K \arrow[r, "u_K"] \arrow[d] & X_K \arrow[d] \\ Y \arrow[r, dotted, "u"] & X. \end{tikzcd}$$

  Hierbei durchläuft Y alle glatten S-Schemata zusammen mit gegebenem Morphismus $u_K : Y_K \to X_K$.

- Das Néron-Modell ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt (wegen universeller Eigenschaft).

- *Lokaler Existenzsatz* (Thm. 1.3/1). Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und sei X_K ein glattes K-Gruppenschema von endlichem Typ.

  Dann hat X_K genau dann ein Néron-Modell über R, wenn $X_K(K^{\mathrm{sh}})$ beschränkt ist in X_K.

- *Globaler Existenzsatz* (Thm. 1.4/3). Sei S ein zusammenhängendes Dedekindschema mit Quotientenkörper K und sei A_K eine abelsche Varietät über K. Dann hat A_K ein Néron-Modell A über S.

  Sei S' die Teilmenge von S, die den generischen Punkt und alle abgeschlossenen Punkte von S, an denen A gute Reduktion hat, enthalte. Dann ist $S' \subseteq S$ eine dichte offene Menge und $A \times_S S'$ ist ein abelsches Schema über S'.

A.9 Gruppenschemata

- Ein eigentliches, glattes S-Gruppenschema mit zusammenhängenden Fasern heißt *abelsches Schema*.

- Ein geometrisch reduziertes Gruppenschema von endlichem Typ über einem Körper ist glatt. Siehe [vdG-M], 3.17.

- Flache Gruppenschemata sind genau dann glatt, wenn sie am Einsschnitt glatt sind.

- (Cartier) Jedes Gruppenschema, das lokal von endlichem Typ über einem Körper der Charakteristik 0 ist, ist reduziert und glatt. Siehe [vdG-M], 3.19.

A.10 Torseure

- Nimm an, dass G treuflach und lokal von endlicher Darstellung über S ist. Dann heißt X ein *S-Torseur unter G* (für die fppf-Topologie (fidèlement plat de présentation finie)), wenn

  (i) $X \to S$ treuflach und lokal von endlicher Darstellung ist und

  (ii) der Morphismus
  $$G \times_S X \to X \times_S X, (g, x) \mapsto (gx, x)$$
  ein Isomorphismus ist.

- Der Torseur X heißt *trivial,* wenn $X(S) \neq \emptyset$. Dann sind G und X S-isomorph.

- Sei $K = \mathrm{Quot}(R)$ mit einem diskreten Bewertungsring R. Der Torseur X_K heißt *unverzweigt,* wenn $X_K(K^{\mathrm{sh}}) \neq \emptyset$. Sonst heißt er *verzweigt* (dann hat er nur "verzweigte" Punkte).

- *Unverzweigter Abstieg von Torseuren.* Sei R ein diskreter Bewertungsring. Sei X_K ein K-Torseur unter einem glatten K-Gruppenschema G_K von endlichem Typ. Seien $R \to R' \to R^{\mathrm{sh}}$. Nimm an, dass es Néron-Modelle G' und X' von $G_{K'}$ bzw. $X_{K'}$ über R' gibt.

  Dann steigen G' bzw. X' ab zu Néron-Modellen G von G_K bzw. X von X_K über R. Ist außerdem der K-Torseur X_K unverzweigt, dann hat X die Struktur eines G-Torseurs. Siehe 6.5/3.

- Sei R ein diskreter Bewertungsring. Sei X_K ein G_K-Torseur, wobei G_K ein K-Gruppenschema von endlichem Typ ist. Dann sind äquivalent:

  (a) X_K hat ein Néron-Modell über R.

  (b) $X_K(K^{\mathrm{sh}})$ ist beschränkt in X_K.

  (c) X_K ist verzweigt oder $G_K(K^{\mathrm{sh}})$ ist beschränkt in G_K.

  Siehe 6.5/4.

A.11 Ausdehnungen

Sei R ein diskreter Bewertungsring, k und K wie immer. Weiter sei X ein R-Schema von endlichen Typ und Y_k ein abgeschlossenes Unterschema von X_k.

- Ein R-Schema X'_π mit einem R-Morphismus $u : X'_\pi \to X$ heißt *Ausdehnung* von Y_k auf X, wenn gelten:

  (i) $X'_\pi \to \mathrm{Spec}(R)$ ist flach.

  (ii) $(X'_\pi)_k \to X_k$ faktorisiert über Y_k.

  (iii) Für jedes flache R-Schema Z und jeden R-Morphismus $v : Z \to X$, so dass $Z_k \to X_k$ über Y_k faktorisiert, gibt es genau einen R-Morphismus $v' : Z \to X'_\pi$ mit $v = u \circ v'$.

D.h. dass X'_π das universelle flache R-Schema ist, dessen spezielle Faser über Y_k faktorisiert.

- Ausdehnungen existieren nach 3.2/1.
- Ausdehnungen kommutieren mit flachem Basiswechsel von Verzweigungsindex 1. Siehe 3.2/2(b).
- Ausdehnungen kommutieren mit Produkten. Siehe 3.2/2(d).
- Sei X glatt über R und Y_k glatt über k. Dann ist die Ausdehnung von Y_k auf X glatt über R. Siehe 3.2/3.

A.12 Der Glattheitsdefekt

- Für jedes R-Schema X von endlichem Typ mit glatter generischer Faser ist der Glattheitsdefekt beschränkt. Siehe 3.3/3.
- Ist der Glattheitsdefekt eines Punktes $a \in G(R^{\mathrm{sh}})$ gleich 0, dann faktorisiert a über den glatten Ort von G. Siehe 3.3/1.

A.13 Der Glättungsprozess - Übersicht

Sei hier R ein diskreter Bewertungsring, $X \to \mathrm{Spec}(R)$ ein Schema von endlichem Typ mit glatter generischer Faser X_K.

- Ein R-Morphismus $f : X' \to X$ heißt *Glättung*, wenn gelten:

  (i) f induziert einen Isomorphismus $X'_K \to X_K$ (insbesondere ist X' ein Modell von X_K).

  (ii) f ist eigentlich.

  (iii) Die kanonische Abbildung $X'_{\mathrm{smooth}}(R^{\mathrm{sh}}) \to X(R^{\mathrm{sh}})$ ist bijektiv.

  Die Bedingung (iii) ist äquivalent dazu, dass $X'_{\mathrm{smooth}}(R') \to X(R')$ bijektiv ist für alle étalen R-Algebren R'. Das heißt, dass nur "unverzweigte" Punkte betrachtet werden.

- In der betrachteten Situation existiert eine Glättung X' von X.
- Durch Einschränkung auf den glatten Ort von X' erhält man ein glattes R-Schema X'' mit einem R-Morphismus

  $$f : X'' \to X,$$

  derart dass

  (i) f einen Isomorphismus $X''_K \to X_K$ induziert und

  (ii) die kanonische Abbildung $X''(R^{\mathrm{sh}}) \to X(R^{\mathrm{sh}})$ bijektiv ist.

  Das heißt, wir haben die Eigentlichkeit gegen die Glattheit gehandelt.

Literatur

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud. *Néron Models*, Springer Verlag, Berlin, 1990.

[vdG-M] G. van der Geer, B. Moonen. *Abelian Varieties*. Preliminary version of textbook.

[Hartshorne] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, Springer, New York, 1977.

[Liu] Q. Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*.

[Milne] J. Milne. *Etale Cohomology*.