

Cours préparatoire

– ensembles et fonctions –

Université du Luxembourg

Semestre d'hiver 2015

Gabor Wiese
gabor.wiese@uni.lu

1 Ensembles

1.1 Introduction

Les ensembles sont un outil indispensable en mathématiques. Nous en avons notamment besoin pour décrire des fonctions. Notre approche des ensembles sera celle du 19^{ème} et du début du 20^{ème} siècle. Une théorie plus rigoureuse ne peut pas être enseignée au début des études.

On peut décrire un ensemble en écrivant ses éléments. Par exemple :

- $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, \dots, X, Y, Z\}$, l'alphabet.
- $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, l'ensemble des chiffres.

On utilise les accolades pour indiquer qu'il s'agit d'un ensemble. Les 'objets' dans un ensemble sont appelés *éléments*.

Vous connaissez déjà des ensembles de l'école :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des nombres naturels/entiers non-négatifs,
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des entiers relatifs,
- \mathbb{Q} , l'ensemble des nombres rationnels (les fractions),
- \mathbb{R} , l'ensemble des nombres réels,
- \mathbb{C} , l'ensemble des nombres complexes (voir le cours à ce sujet).

Nous utiliserons les notations suivantes :

- \emptyset pour l'ensemble vide ;
- \in pour indiquer l'appartenance d'un élément à un ensemble ;
- \notin pour indiquer qu'un élément n'appartient pas à un ensemble ;

- $\#M$ pour indiquer le nombre d'éléments (le cardinal) d'un ensemble.

Par exemple :

- $7 \in \mathbb{R}$
- $7 \in \mathbb{N}$
- $7 \in \mathbb{Z}$
- $-1 \notin \mathbb{N}$
- $1/2 \in \mathbb{Q}$
- $1/2 \notin \mathbb{Z}$
- $A \in \mathcal{A}$ (A est élément de l'ensemble \mathcal{A} , l'alphabet.)
- $A \notin \mathcal{Z}$ (A n'est pas un élément de l'ensemble des chiffres \mathcal{Z} .)
- $\#\mathcal{A} = 26$
- $\#\mathcal{Z} = 10$

Nous exigeons que les ensembles satisfassent les deux propriétés fondamentales suivantes :

- Les éléments d'un ensemble sont tous deux-à-deux distincts, c'est-à-dire qu'un seul objet n'est pas deux fois élément d'un seul ensemble : $\{1, 2, 2, 3\}$ n'est qu'une écriture (non-minimale) de $\{1, 2, 3\}$.
- Les éléments d'un ensemble ne sont pas ordonnés, c'est-à-dire qu'un ensemble ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit ses éléments : $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$.

Une autre façon d'écrire un ensemble est de le définir par des propriétés de ses éléments. Par exemple :

- $\mathcal{X} = \{ \underbrace{xy}_{\text{éléments}} \mid \underbrace{x \in \mathcal{Z}, y \in \mathcal{Z}}_{\text{propriétés}} \} = \{00, 01, 02, 03, \dots, 99\}$.
- $\mathcal{E} = \{P \mid P \text{ est étudiant(e) de ce cours} \}$, l'ensemble des étudiants de ce cours.
- $\mathcal{L} = \{P \mid P \text{ est un/une Luxembourgeois(e)} \}$, l'ensemble de tous les Luxembourgeois.
- $\mathcal{B} = \{ABC \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}, C \in \mathcal{A}\}$, l'ensemble de tous les mots de trois lettres. Noter que la virgule dans la description doit être comprise comme « et » et pourrait être remplacée par « \wedge ».
- $\mathcal{G} = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ est pair} \}$, l'ensemble des nombres naturels pairs.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. L'ensemble

$$[a, b] := \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

est appelé *l'intervalle fermé entre a et b* . (Pour les intervalles ouverts (semi-ouverts), on utilise la notation $]a, b[$ ($]a, b)$.)

1.2 La notion d'ensemble de Georg Cantor

La notion d'ensemble utilisée dans ce cours (et pendant la plupart de vos études) est celle de Georg Cantor :

Par ensemble, nous entendons toute collection M d'objets m de notre intuition ou de notre pensée, définis et distincts, ces objets étant appelés les éléments de M .

Interprétation :

- objet : « objet mathématique » ;
- collection : l'ensemble sera un nouvel objet mathématique ;
- définis : les objets doivent être clairement définis ;
- distincts : il doit être clair si deux objets sont égaux ou distincts.

Il y a des subtilités avec les ensembles que vous n'allez pas rencontrer pendant vos études (sauf dans un cours de logique mathématique). C'est à cause de cela qu'il faut en fait utiliser une notion plus moderne. Pour les mathématiques que nous allons faire, cela ne fera aucune différence.

Voici un problème avec la notion de Cantor : le paradoxe de Russell. Il en suit qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.

En effet, supposons par l'absurde que l'ensemble de tous les ensembles existe ; appelons le Ω . Nous pouvons alors considérer le sous-ensemble A de Ω formé des ensembles X tels que X n'est pas un élément de l'ensemble X :

$$A = \{X \in \Omega \mid X \notin X\}.$$

Qu'en est-il alors de A ? Si A est un élément de A ($A \in A$), alors par définition de A , A n'est pas un élément de A ($A \notin A$). Et si A n'est pas un élément de A ($A \notin A$), alors par définition de A , A est un élément de A ($A \in A$). Aucune de ces deux options n'est donc possible.

1.3 Sous-ensembles et opérations sur les ensembles

Définition 1.1. Soient A, B des ensembles.

- B est appelé sous-ensemble/partie de A si pour tout $b \in B$ on a $b \in A$. Notation : $B \subseteq A$.
- A et B sont appelés égaux si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. Notation : $A = B$.
- On appelle l'ensemble

$$A \setminus B := \{a \mid a \in A, a \notin B\}$$

le complément ou la différence de B dans A .

- On appelle l'ensemble

$$A \cup B := \{a \mid a \in A \vee a \in B\}$$

la réunion de A et B .

- On appelle l'ensemble

$$A \cap B := \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$$

l'intersection de A et B .

- Si on a $A \cap B = \emptyset$, on appelle $A \cup B$ la réunion disjointe de A et B . Notation : $A \dot{\cup} B$ ou $A \sqcup B$.
- On appelle l'ensemble

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

le produit cartésien de A et B . Ses éléments sont aussi appelés couples.

Par exemple :

- $\{A, D, Z\} \subseteq \mathcal{A}$.
- $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathcal{Z}$; aussi : $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{N}$.
- $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{N}$
- $[1, 2] \subseteq \mathbb{R}$
- $\mathcal{Z} \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 3, 4, 5\} = \{1\}$.
- $\{1, 2, 3\} \setminus \mathcal{Z} = \emptyset$.
- $[1, 3] \setminus [2, 3] = [1, 2[$.
- $\{1, 2\} \cup \{8, 9\} = \{1, 2, 8, 9\} = \{1, 2\} \dot{\cup} \{8, 9\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. (Tout élément n'appartient qu'une fois à l'ensemble !)
- $[1, 3] \cap [2, 4] = [2, 3]$
- $\mathcal{L} \cap \mathcal{E} = \{A \mid A \text{ est Luxembourgeois et étudiant de ce cours } \}$.
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est l'ensemble de tous les couples (a, b) avec $a, b \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{A} \times \mathcal{Z} = \{(A, 0), (A, 1), \dots, (A, 9), (B, 0), (B, 1), \dots, (B, 9), (C, 0), \dots, (Z, 9)\}$.
- $\{n \mid n \in \mathbb{Z}, 2 \text{ divise } n\} \cap \{n \mid n \in \mathbb{Z}, 3 \text{ divise } n\} = \{n \mid n \in \mathbb{Z}, 6 \text{ divise } n\}$.

1.4 Quelques propriétés

Lemme 1.2. Soient A, B, C des ensembles. Alors, les assertions suivantes sont vraies :

- (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Démonstration. (a) Nous nous souvenons que deux ensembles sont égaux si l'un est sous-ensemble de l'autre et réciproquement. Nous allons alors montrer les deux inclusions :

$$(1) A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(2) A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Par définition de \subseteq il faut montrer :

$$(1) x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$(2) x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C).$$

$$(1) \text{ Soit } x \in A \cap (B \cup C).$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Nous avons démontré (1). Dans les calculs on s'est servi des règles pour le calcul avec les symboles « \vee , \wedge » (voir cours de logique).

$$(2) \text{ Soit } x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$$

$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C).$$

Nous avons démontré (2), et donc (a).

(b) Exercice 1.5. □

Nous avons vu que l'intersection correspond au « et/ \wedge » et la réunion au « ou/ \vee ». Dans le prochain lemme nous voyons que le complément correspond à la négation.

Lemme 1.3. Soient E un ensemble, A et B des parties de E et $\bar{A} = E \setminus A$ et $\bar{B} = E \setminus B$, les complémentaires de A et B dans E ; on a :

$$(a) A \cap \bar{A} = \emptyset \text{ et } A \cup \bar{A} = E \text{ (autrement dit } A \sqcup \bar{A} = E \text{)};$$

$$(b) E \setminus (E \setminus A) = A \text{ (autrement dit } \overline{\bar{A}} = A \text{)};$$

$$(c) A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A};$$

$$(d) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

$$(e) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Démonstration.

- (a) Supposons par l'absurde que l'intersection $A \cap \bar{A}$ est non vide. Soit alors x un élément dans $A \cap \bar{A}$. On a : $x \in A \wedge x \notin A$. Ceci est impossible, donc $A \cap \bar{A}$ est vide.

Comme A et \bar{A} sont des sous-ensembles de E , leur union l'est aussi : on a $A \cup \bar{A} \subseteq E$. Démontrons maintenant que E est inclus dans l'union $A \cup \bar{A}$. Pour cela, soit x un élément de E . On a : $x \in A \vee x \notin A$. Ceci prouve que x appartient à $A \cup \bar{A}$. Ainsi, on a $E \subseteq A \cup \bar{A}$, et finalement l'égalité.

- (b) Soit x dans E ; on a :

$$x \in E \setminus (E \setminus A) \Leftrightarrow x \notin E \setminus A \Leftrightarrow \neg(x \in E \setminus A) \Leftrightarrow \neg(x \notin A) \Leftrightarrow x \in A.$$

Ceci prouve l'égalité des deux ensembles.

- (c) La clé dans cette démonstration est la contraposée. Par définition, l'inclusion $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ signifie

$$\forall x \in E : (x \notin B \Rightarrow x \notin A).$$

On reconnaît que l'assertion entre parenthèses est la contraposée de l'assertion entre parenthèses de

$$\forall x \in E : (x \in A \Rightarrow x \in B),$$

qui signifie précisément $A \subseteq B$.

- (d) Soit x dans E ; on a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}. \end{aligned}$$

Ceci prouve l'égalité des deux ensembles.

- (e) On a, d'après (b) et (d) :

$$\overline{A \cap B} = \overline{\overline{\overline{A \cap B}}} = \overline{\overline{\overline{A \cup B}}} = \overline{A \cup B}.$$

□

1.5 Exercices sur les ensembles

Exercice 1.4. Soient

$$A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ est divisible par } 2\} \text{ et } B = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ est divisible par } 5\}.$$

- (a) Décrire l'intersection $A \cap B$.
- (b) Décrire la réunion $A \cup B$.
- (c) Décrire le complément $B \setminus A$.
- (d) Décrire le complément $A \setminus B$.

(e) Donner le cardinal de $[12, 27] \cap A$ et de $[12, 27] \cap B$.

Exercice 1.5. (Deuxième partie du lemme 1.2.) Soient A, B et C des ensembles. Démontrer :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Exercice 1.6. (a) Soient A et B des ensembles. Démontrer :

$$(1) A \subseteq B \iff A = A \cap B \iff B = A \cup B;$$

$$(2) A \cap B = \emptyset \iff A \setminus B = A.$$

(b) Soient E un ensemble et A, B des sous-ensembles de E . Démontrer :

$$(1) A \cap B = \emptyset \iff B \subseteq E \setminus A \iff A \subseteq E \setminus B;$$

$$(2) A \cup B = E \iff E \setminus A \subseteq B \iff E \setminus B \subseteq A.$$

1.6 Corrigé des exercices sur les ensembles

Exercice 1.4. Soient

$$A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ est divisible par } 2\} \text{ et } B = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ est divisible par } 5\}.$$

(a) $A \cap B = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ est divisible par } 10\}$.

Raison : un entier relatif n est divisible par 10 si et seulement s'il est divisible par 2 et 5.

(b) $A \cup B = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ est divisible par } 5 \text{ ou par } 2\}$.

(c) $B \setminus A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ est divisible par } 5 \text{ et n'est pas divisible par } 10\}$.

(d) $A \setminus B = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ est divisible par } 2 \text{ et n'est pas divisible par } 5\}$.

(e) $[12, 27] \cap A = \{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26\}$, donc son cardinal est 8.

$[12, 27] \cap B = \{15, 20, 25\}$, donc son cardinal est 3.

Exercice 1.5. Soient A, B et C des ensembles. On a :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Avec la même argumentation que pour (a) du lemme 1.2, nous devons démontrer :

$$(1) x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$(2) x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$$

(1) Soit $x \in A \cup (B \cap C)$

$$\Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Nous avons démontré (1).

$$(2) \text{ Soit } x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$$

$$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$$

Nous avons démontré (2) et donc l'assertion demandée.

Exercice 1.6.

(a) Soient A et B des ensembles. On a :

$$(1) A \subseteq B \iff A = A \cap B \iff B = A \cup B.$$

Raison : Il y a plusieurs manières pour démontrer cela. Nous en donnons une.

Commençons par les équivalences suivantes :

$$A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B) \iff (x \in A \iff (x \in A \wedge x \in B)) \iff A = A \cap B.$$

Regardons maintenant les équivalences suivantes :

$$A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B) \iff (x \in B \iff (x \in A \vee x \in B)) \iff B = A \cup B.$$

$$(2) A \cap B = \emptyset \iff A \setminus B = A.$$

Raison :

$$A \cap B = \emptyset \iff (x \in A \Rightarrow x \notin B) \iff A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A\} = A.$$

(b) Soient E un ensemble et A, B des sous-ensembles de E . On a :

$$(1) A \cap B = \emptyset \iff B \subseteq E \setminus A \iff A \subseteq E \setminus B.$$

Raison : D'abord nous avons les équivalences

$$A \cap B = \emptyset \iff \forall x \in E : (x \in A \Rightarrow x \notin B) \iff A \subseteq E \setminus B.$$

Pour voir le reste il suffit de prendre la contraposée de l'assertion $\forall x \in E : (x \in A \Rightarrow x \notin B)$ est $\forall x \in E : (x \in B \Rightarrow x \notin A)$ qui équivaut à l'inclusion $B \subseteq E \setminus A$.

$$(2) A \cup B = E \iff E \setminus A \subseteq B \iff E \setminus B \subseteq A.$$

Ces équivalences peuvent être démontrées avec des arguments similaires. Mais il est aussi possible d'appliquer les règles pour les compléments dans le lemme 1.3 à l'assertion (1).

2 Applications et fonctions

Dans ce cours, nous utilisons les mots « application » et « fonction » comme des synonymes.

2.1 La notion d'une application/fonction

Commençons par des exemples :

- Considérons l'application $f : \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{source}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{but}}$ donnée par la règle $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x^2 est l'image de x par f . Par exemple : 4 est l'image de 2 par f .

On dit aussi que 2 est une image réciproque/un antécédant de 4 par f . Noter que -2 est un autre antécédant, donc les antécédants ne sont pas uniques.

Si une application est donnée par une règle comme f , on écrit la règle aussi comme $x \xrightarrow{f} x^2$ ou $x \mapsto x^2$ tout court.

L'image de f est la partie du but dans laquelle tout élément possède au moins un antécédant. Dans notre cas on a $\text{im}(f) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{X, Y\}$. On voudrait définir une application $g : \underbrace{A}_{\text{source}} \rightarrow \underbrace{B}_{\text{but}}$. Nous pouvons simplement le faire en posant $g(1) = X$, $g(2) = Y$, $g(3) = X$.

Une autre possibilité serait $g(1) = X$, $g(2) = Y$, $g(3) = Y$, et encore une autre $g(1) = Y$, $g(2) = Y$, $g(3) = Y$ (c'est une fonction constante).

Par contre, il n'est ni permis de poser $g(1) = X$, $g(1) = Y$, $g(2) = X$, $g(3) = Y$, ni suffisant de poser $g(1) = X$ et $g(2) = Y$ car :

Dans la définition d'une application/fonction, tout élément de la source doit posséder une et une unique image dans le but.

- On peut définir l'application $S : \mathcal{L} \rightarrow \{\text{homme, femme}\}$ par la règle $S(P) = \text{homme}$ si la personne P de l'ensemble \mathcal{L} de tous les Luxembourgeois est un homme, et $S(P) = \text{femme}$ sinon.

Nous allons formaliser cette notion maintenant.

Définition 2.1. Soient A, B des ensembles. Une application $f : A \rightarrow B$ est une règle qui associe à tout élément $a \in A$ un unique élément $f(a) \in B$.

On appelle A l'ensemble de départ ou la source de f et B l'ensemble d'arrivée ou but de f .

Les applications sont aussi appelées fonctions.

Soit $f : A \rightarrow B$ une application.

- Si $a \in A$, on appelle $f(a)$ l'image de a par f .
- Soit $S \subseteq A$ un sous-ensemble. L'ensemble

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\} \subseteq B$$

est appelé l'image (directe) de S par f .

L'ensemble $f(A) = \text{im}(f)$ est appelé l'image de f (tout court).

- Soit $b \in B$. Tout $a \in A$ tel que $f(a) = b$ est appelé une image réciproque (ou préimage ou antécédent) de b (Un tel élément n'existe pas toujours et lorsqu'il existe, il n'est pas unique en général!).
- Soit $T \subseteq B$ un sous-ensemble. L'ensemble

$$f^{-1}(T) = \{a \mid a \in A, f(a) \in T\} \subseteq A$$

est appelé l'image réciproque (ou préimage ou antécédant) de T par f .

- On appelle l'ensemble

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$$

le graphe de f .

Le graphe de f est comme vous le connaissez (le dessiner).

2.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 2.2. Soient A, B des ensembles et $f : A \rightarrow B$ une application.

- L'application f est appelée injective si pour tout $x, y \in A$ l'assertion

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

est vraie. Noter la formulation équivalente : f est injectif si et seulement si pour tout $x, y \in A$ distincts $x \neq y$ leurs images sont aussi distinctes $f(x) \neq f(y)$.

- L'application f est appelée surjective si pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Noter que f est surjectif si et seulement si $f(A) = B$.
- L'application f est appelée bijective si elle est injective et surjective.

Regardons ce que ces notions veulent dire dans des exemples.

- Considérons encore l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto x^2$.

Alors, f n'est pas surjective car, par exemple, -1 ne possède pas d'antécédant. Elle n'est pas injective non plus, puisque $f(-1) = 1 = f(1)$.

- Faisons une petite modification et considérons l'application

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Elle est surjective mais pas injective.

- Modifions-la encore un peu et considérons l'application

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Maintenant, elle est injective mais pas surjective.

- Finalement, considérons l'application

$$f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x \mapsto x^2.$$

Maintenant elle est injective et surjective, donc bijective.

- Regardons maintenant le deuxième exemple du début avec $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{X, Y\}$ et l'application $g : A \rightarrow B$ par $g(1) = X$, $g(2) = Y$, $g(3) = X$.

Cette application est surjective. Il suffit qu'il existe une image réciproque pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée. Vérifions ceci : une image réciproque de X est 1 (une autre est 3) et une image réciproque de Y est 2.

Elle n'est pas injective, car 1 et 3 sont deux éléments distincts de A qui ont la même valeur $g(1) = X = g(3)$.

- L'application S est surjective : il existe au moins un Luxembourgeois et au moins une Luxembourgeoise (probablement présentes dans cette salle). Elle n'est pas injective : il y a plus qu'une Luxembourgeoise ou il y a plus qu'un Luxembourgeois (probablement aussi présents dans cette salle).
- Considérons l'application $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ donnée par la règle $f(n) = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Son image $f(\mathbb{Z})$ est l'ensemble de tous les entiers relatifs pairs. Alors, elle n'est pas surjective. Mais f est injective : si $f(n) = 2n$ et $f(m) = 2m$ sont égaux, alors, $n = m$.
- Considérons l'application $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n \text{ est pair}\}$ donnée par la règle $f(n) = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Elle est bijective.
- Pour tout ensemble A on considère l'application *identité* $\text{id}_A : A \rightarrow A$ donnée par la règle $\text{id}_A(a) = a$ pour tout $a \in A$.
Elle est bijective.

Pour des ensembles finis (c'est-à-dire, de cardinal fini), la proposition suivante est parfois très utile :

Proposition 2.3. Soient A, B deux ensembles et $f : A \rightarrow B$ une application.

(a) Supposons que A soit fini de cardinal n . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est injectif.
- (ii) $\text{im}(f) = \#A = n$.

(b) Supposons que A, B soient finis de même cardinal n . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est injectif.
- (ii) f est surjectif.

(iii) f est bijectif.

Démonstration. (a) (i) \Rightarrow (ii) : Comme les images $f(a)$ pour $a \in A$ sont distinctes, il en suit directement que l'image est de cardinal égal à $\#A$.

(ii) \Rightarrow (i) : Comme on suppose qu'il existe autant d'images qu'éléments dans la source, les images $f(a)$ pour $a \in A$ sont deux-à-deux distinctes, donc f est injectif.

(b) Les implications (iii) \Rightarrow (i) et (iii) \Rightarrow (ii) sont triviales.

(i) \Rightarrow (iii) : Par (a), le cardinal de l'image de f est égal au cardinal du but, donc f est surjectif.

(ii) \Rightarrow (iii) : La surjectivité implique que le cardinal de l'image de f est égal au cardinal du but, donc f est injectif par (a). \square

2.3 Composition d'applications et application inverse

Définition 2.4. Soient A, B, C des ensembles et $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ des applications. On appelle l'application

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad a \mapsto g(f(a))$$

la composée de g et f .

Voici, des exemples :

- Considérons les applications $[1, 2] \xrightarrow{f} [2, 3] \xrightarrow{g} [4, 9]$ données par les règles $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$. Alors, l'application $g \circ f$ est donnée par la règle $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$.
- Soit $f : A \rightarrow B$ une application. Alors $\text{id}_B \circ f = f$, puisque pour tout $a \in A$ on a $(\text{id}_B \circ f)(a) = \text{id}_B(f(a)) = f(a)$. De la même manière on voit $f \circ \text{id}_A = f$.

Lemme 2.5 (Associativité de la composition d'applications). Soient A, B, C, D des ensembles et $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$ des applications. Alors, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Démonstration. Deux applications $A \rightarrow D$ sont égales si elles prennent la même valeur pour chaque $a \in A$. Nous allons vérifier que ceci est le cas pour $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$. Soit $a \in A$. Nous avons

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$$

et

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))).$$

Puisque les deux expressions sont les mêmes pour tout $a \in A$, nous avons achevé la démonstration. \square

Lemme 2.6. Si $f : A \rightarrow B$ est une application bijective, alors il existe une unique application $g : B \rightarrow A$ telle que $g \circ f = \text{id}_A$ et $f \circ g = \text{id}_B$. Elle est donnée par la règle $g(b) = a$ où pour tout $b \in B$ on prend l'unique $a \in A$ tel que $f(a) = b$. L'application g est appelée l'inverse de f et souvent notée f^{-1} (attention : ne pas confondre la fonction inverse avec l'image réciproque!).

Démonstration. Il y a deux choses à faire : (1) montrer l'existence d'une telle fonction g et (2) vérifier son unicité.

(1) Existence : Nous avons l'assertion

$$\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b.$$

En effet, l'existence provient de la surjectivité et l'unicité de l'injectivité. On pose $g(b) := a$. On a donc

$$\forall b \in B : f(g(b)) = f(a) = b \Rightarrow f \circ g = \text{id}_B.$$

Soit $a \in A$. Pour $b := f(a)$ il existe un unique $a' \in A$ tel que $f(a') = b = f(a)$, donc $a = a'$ par l'injectivité de f . En conséquence, $g(f(a)) = a' = a$ et donc $g \circ f = \text{id}_A$.

(2) Unicité : Supposons que $h : B \rightarrow A$ est une application qui satisfait aussi $h \circ f = \text{id}_A$ et $f \circ h = \text{id}_B$.

A cause de $f \circ h = \text{id}_B$ et $f \circ g = \text{id}_B$, nous concluons

$$f \circ h = f \circ g.$$

En conséquence, on a

$$g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ g).$$

L'associativité d'applications (lemme 2.5) implique :

$$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ g.$$

On utilisant $g \circ f = \text{id}_A$ nous obtenons :

$$\text{id}_A \circ h = \text{id}_A \circ g.$$

Les égalités $\text{id}_A \circ h = h$ et $\text{id}_A \circ g = g$ impliquent

$$h = g,$$

et la démonstration est complète. □

2.4 Exercices sur les fonctions

Exercice 2.7. Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{A, B, C, D\}$.

- (a) Décrire une application surjective de A dans B .
- (b) Décrire une application de A dans B qui n'est ni surjective ni injective.
- (c) Existe-t-il une application injective de A dans B ? Raison ?
- (d) Décrire une application injective de B dans A .
- (e) Décrire une application de B dans A qui n'est ni surjective ni injective.
- (f) Existe-t-il une application surjective de B dans A ? Raison ?

Exercice 2.8. (a) Trouver une application injective et non bijective de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

(b) Trouver une application surjective et non bijective de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

(c) Trouver une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et \mathbb{N} .

Exercice 2.9. Soit $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ la fonction sinus (connue de l'école) :

(a) Est-ce que \sin est bijectif ?

(b) Décrire l'image réciproque $\sin^{-1}(\{0\})$.

(c) Décrire l'image réciproque $\sin^{-1}(\{1\})$.

Exercice 2.10. Soient A, B, C des ensembles et $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ des applications. Démontrer les assertions suivantes :

(a) $g \circ f$ est injectif $\Rightarrow f$ est injectif.

(b) Si f et g sont tous les deux injectifs (respectivement surjectifs, respectivement bijectifs), alors $g \circ f$ est injectif (respectivement surjectif, respectivement bijectif).

2.5 Corrigé des exercices sur les fonctions

Exercice 2.7. Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{A, B, C, D\}$.

(a) Décrire une application surjective $f : A \rightarrow B$.

Par exemple : $f(1) = A, f(2) = B, f(3) = C, f(4) = D, f(5) = A$.

(b) Décrire une application de A dans B qui n'est ni surjective ni injective.

Par exemple : $f(1) = A, f(2) = A, f(3) = A, f(4) = A, f(5) = A$.

(c) Existe-t-il une application injective de A dans B ?

Non, car si une telle application injective f existait, nous aurions $\#\text{im}(f) = \#A = 5$ et $\text{im}(f) \subseteq B$, mais, B ne possède pas de sous-ensemble de cardinal 5 car $\#B = 4$, contradiction.

(d) Décrire une application injective $g : B \rightarrow A$.

Par exemple : $g(A) = 1, g(B) = 2, g(C) = 3, g(D) = 4$.

(e) Décrire une application de B dans A qui n'est ni surjective ni injective.

Par exemple : $g(A) = 1, g(B) = 1, g(C) = 1, g(D) = 1$.

(f) Existe-t-il une application surjective de B dans A ?

Non, car si $g : B \rightarrow A$ était surjective, alors on aurait $4 = \#B \geq \#A = 5$, contradiction.

Exercice 2.8.

(a) Trouver une application injective et non bijective de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Par exemple, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto 2n$.

(b) Trouver une application surjective et non bijective de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

$$\text{Par exemple, } f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

(c) Trouver une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et \mathbb{N} .

Par exemple :

$$f(n) := \begin{cases} (n - m^2, m) & \text{si } m^2 \leq n \leq m^2 + m \text{ pour un } m \in \mathbb{N}, \\ (m, m^2 + 2m - n) & \text{si } m^2 + m + 1 \leq n \leq (m + 1)^2 - 1 \text{ pour un } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On comprend cette application au mieux si on fait un petit dessin.

Exercice 2.9. Soit $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ la fonction sinus (connue de l'école) :

(a) Est-ce que \sin est bijectif ?

Non, car \sin n'est pas injectif : par exemple $\sin(0) = \sin(\pi)$.

(b) Décrire l'image réciproque $\sin^{-1}(\{0\})$.

On a $\sin^{-1}(\{0\}) = \{n \cdot \pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(c) Décrire l'image réciproque $\sin^{-1}(\{1\})$.

On a $\sin^{-1}(\{1\}) = \{\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2.10. Soient A, B, C des ensembles et $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ des applications. Démontrer les assertions suivantes :

(a) $g \circ f$ est injectif $\Rightarrow f$ est injectif.

Démonstration (de l'assertion contraposée). Supposons que f n'est pas injectif. Il existe donc $a_1, a_2 \in A$ tels que $a_1 \neq a_2$ et $f(a_1) = f(a_2)$. En conséquence, $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$; cela montre que $g \circ f$ n'est pas injectif.

(b) Si f et g sont tous les deux injectifs (respectivement surjectifs, respectivement bijectifs), alors $g \circ f$ est injectif (respectivement surjectif, respectivement bijectif).

Démonstration. Supposons d'abord f, g injectifs et donnons-nous $a_1, a_2 \in A$ tels que $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. L'injectivité de g implique $f(a_1) = f(a_2)$. L'injectivité de f nous donne maintenant $a_1 = a_2$, montrant l'injectivité de $g \circ f$.

Supposons maintenant f, g surjectifs et donnons-nous $c \in C$. La surjectivité de g montre l'existence d'un $b \in B$ tel que $g(b) = c$. Maintenant la surjectivité de f implique l'existence de $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Nous avons donc $g(f(a)) = g(b) = c$. Alors $g \circ f$ est surjectif.

Supposons finalement f, g bijectifs. Cela implique que f, g sont injectifs et surjectifs. Par ce que nous venons de voir, $g \circ f$ est injectif et surjectif, donc bijectif.