

# Seminar/Hauptseminar: Die Catalansche Vermutung

Sommersemester 2006 - Universität Regensburg

Prof. Dr. A. Schmidt  
Dr. G. Wiese

Mi 14–16, M 102

---

Der belgische Mathematiker Eugène Charles Catalan hat 1844 vermutet, dass die einzigen Lösungen der Gleichung

$$x^p - y^q = 1$$

für ganze Zahlen  $x, y, p, q$  mit  $x, y \neq 0$  und  $p, q \geq 2$  gegeben sind durch  $p = 2, q = 3, x = \pm 3$  und  $y = 2$  bzw.  $9 - 8 = 1$ . Diese berühmte Vermutung wurde 2002 durch Preda Mihăilescu bewiesen und war eine der wissenschaftlichen Sensationen in jenem Jahr (z.B. Spektrum der Wissenschaft berichtete). Ganz im Gegensatz zu Wiles' Beweis der Fermatschen Vermutung gebraucht Mihăilescu nur Methoden, die Student(inn)en im Hauptstudium zugänglich sind! Unser Ziel im Seminar ist es, den Beweis möglichst vollständig zu verstehen.

Wir werden dabei hauptsächlich einer uns vorliegenden ersten Version eines geplanten Buches von René Schoof folgen ([S]), das im Grunde (mit wenigen Ausnahmen) nur elementare Kenntnisse der Algebra und der algebraischen Zahlentheorie voraussetzt. Daher sollten Teilnehmer auch die Vorlesung zur algebraischen Zahlentheorie besuchen. Der Beweis beruht auf der Theorie der Kreisteilungskörper, die wir im Seminar einführen werden.

Eine Kopie des Buches [S] wird Interessenten zur Verfügung gestellt. Achtung: das Buch enthält noch eine Reihe von falschen Verweisen und anderen kleineren Problemen. Wir werden eine Fehlerliste erstellen.

Weitere Informationen und Hilfestellungen gibt es bei Gabor Wiese (Zimmer M 115, Tel.: (0941) 943-2793, E-Mail: [gabor.wiese@mathematik.uni-regensburg.de](mailto:gabor.wiese@mathematik.uni-regensburg.de)).

## Vorträge:

1. *Einführung und der Fall  $q = 2$*  (**Michael Plesche und Tobias Schedlmeier**), 26.04.2006

Der Vortrag soll zunächst einen kurzen geschichtlichen Überblick über die Catalansche Vermutung geben (siehe z.B. [D]). Beweise nun die Aufgaben 1.1 und 1.2. aus [S]. Dann sollen die Theoreme I, II und III und die Sätze von Lebesgue (Proposition 2.1) und Ko Chao (Corollary 3.4) aus [S] formuliert werden, und es soll gezeigt werden, wie die Catalansche Vermutung aus diesen folgt. Abschließend soll der Satz von Lebesgue (der Fall  $q = 2$ ) bewiesen werden. Dieser gebraucht die Arithmetik der Gaußschen Zahlen (siehe z.B. [N], Abschnitt I.1).

2. *Der Fall  $p = 2$*  (**Michael Schweinfurter und Bernd Brandl**), 03.05.2006

Der Vortrag soll Abschnitt 3 von [S] behandeln (inkl. der Aufgaben). Siehe aber auch [D].

3. *Die nicht-triviale Lösung* (**Philipp Hanft und Martin Sigl**), 10.05.2006

Der Vortrag soll Abschnitt 4 von [S] behandeln (inkl. der benötigten Aufgaben). Eventuell kann man auch nach [M], Kapitel 1, vorgehen.

4. *Cassels Sätze* (**Florian Klössinger**), 17.05.2006

Es soll Abschnitt 6 aus [S] behandelt werden. Der Vortragende darf selbst entscheiden, ob er die Sprache von "Runge's Methode" gebraucht, oder einfach den Argumenten im Buch folgt und alles zu "Runge's Methode" auslässt. (Achtung: Die Referenzen zu den Aufgaben sind fast alle falsch.)

5. *Kreisteilungskörper* (**Benedikt Booker und Stefan Mörs**), 24.05.2006

Behandle Abschnitt 7 von [S] bis einschließlich Proposition 7.3. Erkläre und beweise (soweit die Zeit dies erlaubt) alle benötigten Fakten zu Kreisteilungskörpern (Ring der ganzen Zahlen, Galoisgruppe, Primideal über  $p$  etc.). Andere Referenzen sind der Anfang von [W] und Abschnitt I.10 aus [N].

6. *Kleine  $p$  und  $q$  (Theorem IV)* (**Gerrit Kern und René Gerold**), 31.05.2006

Behandle Abschnitt 8 von [S]. Beweise Theorem IV mit 5 anstatt 43. Siehe auch [D].

7. *Das Stickelbergerideal (Teil 1)* (**Tobias Schaffer und Christian Fahnenschreiber**), 07.06.2006

Führe das Stickelbergerideal ein und behandle Abschnitt 9 von [S] bis einschließlich Theorem 9.3. Dabei werden u.a. auch die verallgemeinerten Bernoulli-Zahlen eingeführt (siehe z.B. 7.4). Zusätzlich können auch [W] und [L] zu Rate gezogen werden.

8. *Das Stickelbergerideal (Teil 2) und das Doppel-Wieferich-Kriterium (Theorem II)* (**Alexander Oster**), 14.06.2006

Beweise Theorem 9.4 aus [S]. Anschließend behandle Abschnitt 10 aus [S].

9. *Das Minusargument (Theorem III)* (**Agathe Thellmann und Manuel Liedel**), 21.06.2006

Behandle Abschnitt 11 aus [S]. Siehe auch [D].

10. *Das Plusargument (Teil 1)* (**Florian Weber**), 28.06.2006

Behandle Abschnitt 12 aus [S].

11. *Das Plusargument (Teil 2) (Theorem I)* (**Stefanie Schneider**), 05.07.2006

Gib einen kurzen Überblick über Abschnitt 13 von [S] und behandle dann Abschnitt 14. Dabei soll Thaines Satz nur zitiert werden.

12. *Thaines Satz* (**Johannes to Baben**), 12.07.2006

Gib einen Überblick über Abschnitt 15 von [S]. Voraussetzung ist die Kenntnis von Klassenkörpertheorie.

## Literatur

[D] J. Daems, *A Cyclotomic Proof of Catalan's Conjecture*, Doctoraalscriptie, Universiteit Leiden 2003, <http://www.math.leidenuniv.nl/~jdaems/scriptie/Catalan.pdf>

[L] S. Lang, *Cyclotomic Fields I and II*, Springer-Verlag

[M] M. Mischler, *La conjecture de Catalan - racontée à un ami qui a le temps*, <http://arxiv.org/abs/math.NT/0502350/>

[N] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Verlag

[S] R. Schoof, *Catalan's Conjecture*, Buch in Vorbereitung

[W] L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Springer-Verlag