NOM : Correction
PRENOM :
GROUPE :

Licence Sciences & Technologies
Fondamentaux des mathématiques I
Séquence 2+5, Info - Automne 2018

Test 2 (15 min - octobre 2018)

Attention : rédiger directement sur la feuille. Documents, calculatrice, téléphone non autorisés.

Question de cours - (10 points)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, ..., n-1\}$. Montrer que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$ (2 points).
2. Montrer que si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est une application strictement croissante, alors f est injective. (4 points).
3. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^3 - 6x > x^2 + 6x$. (4 points).

1) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ et $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2) Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $x_1 \neq x_2$. Alors $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$.
Si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$. Si $x_1 > x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$.
Finalement, $(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$, donc f est injective.

3) $x^3 - 6x > x^2 + 6x \Leftrightarrow x(x^2 - x - 12) > 0$.
Notons $p(x) = x^2 - x - 12$.
Alors $xp(x) > 0 \Leftrightarrow (x > 0$ et $p(x) > 0)$ ou $(x < 0$ et $p(x) < 0)$.
On montre que $p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, 4\}$ $(\Delta = 1 - 4 \times (-12) = 49)$
Donc $p(x) > 0 \Leftrightarrow (x < -3$ ou $x > 4\}$, $p(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 4[$.
Finalement, $xp(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-3, 0[\cup]4, +\infty[$.

remarque : on peut s'aider d'un tableau de signe :

x		-3		0		4	
sign(x)	$-$		$-$	0	$+$		$+$
sign($p(x)$)	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
sign($xp(x)$)	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

Exercice - (10 points)

1. On définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par $x \mapsto \sqrt{x}$. Déterminer $g \circ f$. (3 points).
2. On définit $h : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$. On admettra que c'est une bijection. Déterminer la bijection inverse h^{-1}. (4 points)
3. On définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $x \mapsto \sqrt{|x|}$. Déterminer les images inverses de $\{1, 4\}$ et $\{-1\}$. (3 points)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $g \circ f(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$.

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Alors $h(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = xy - y \Leftrightarrow x - xy = -y-1$

$\Leftrightarrow x(1-y) = -y-1 \Leftrightarrow x = \frac{-y-1}{1-y} = \frac{y+1}{y-1}$.

Donc $h^{-1} : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$y \longmapsto \frac{y+1}{y-1}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{|x|} = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$,

$f(x) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{|x|} = 4 \Leftrightarrow x \in \{-16, 16\}$,

D'où $f^{-1}(\{1,4\}) = \{-16, -1, 1, 16\}$.

Enfin, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$. Donc $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset (= \{\})$