Feuille XI

Exercice 1.1. D'après le cours (formule 3.4), le vecteur normal est donné par

$$n(u) \quad = \quad \frac{f^1(u) \wedge f^2(u)}{\|f^1(u) \wedge f^2(u)\|}$$

Comme

$$\begin{aligned}
f^1(u) &= (-\rho \sin u_1 \cos u_2, -\rho \sin u_1 \sin u_2, \rho \cos u_1) \\
f^2(u) &= (-(R + \rho \cos u_1) \sin u_2, (R + \rho \cos u_1) \cos u_2, 0)
\end{aligned}$$

$$f^1(u) \wedge f^2(u) = (\ldots) = \begin{pmatrix} -\rho(R + \rho \cos u_1) \cos u_2 \cos u_1 \\ -\rho(R + \rho \cos u_1) \sin u_2 \cos u_1 \\ \rho(R + \rho \cos u_1) \sin u_1 (-1) \end{pmatrix}$$

et $\|f^1(u) \wedge f^2(u)\| = \rho(R + \rho \cos u_1)$, alors

$$n(u) = (-\cos u_2 \cos u_1, -\sin u_2 \cos u_1, -\sin u_1)$$

2. On utilise une formule du cours (Remarque 3.1.10, a)

$$
\begin{aligned}
v &= f_{*,u}(A) \\
&= f_{*,u}((a_1, a_2)) \\
&= a_1 f^1(u) + a_2 f^2(u) \\
&= \frac{-1}{\rho} f^1(u) + 0 \\
&= (\ldots) \\
&= (0, 0, 1)
\end{aligned}
$$

3. Le plan P correspond à l'ensemble

$$\begin{aligned} P &= \{\, f(u) + av + bn(u) \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \{\, (-(R-\rho), 0, 0) + a(0,0,1) + b(-1,0,0) \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \{\, (-R + \rho - b, 0, a) \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \,\} \end{aligned}$$

donc $x \in P$ est équivalent à $x_2 = 0$.

4.a. On a

$$\gamma(t) = (-R + \rho \cos \frac{t}{\rho}, \ 0, \ \rho \sin \frac{t}{\rho})$$

comme la deuxième coordonnée=0, $\gamma(t) \in P$ pour tout t.
b. Théorème 3.3.2

$$k_{f(u)}(v) = \langle \gamma''(0), n(u) \rangle$$

Comme

$$\gamma''(t) \ = \ (-\frac{1}{\rho} \cos \frac{t}{\rho}, \ 0, \ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{t}{\rho})$$

on a donc

$$k_{f(u)}(v) = \langle \gamma''(0), (-1, 0, 0) \rangle = \frac{1}{\rho}$$

Exercice 2.a. La seconde forme fondamentale est la matrice

$$H(u) = \begin{pmatrix} \langle f^{11}(u), n(u)\rangle & \langle f^{12}(u), n(u)\rangle \\ \langle f^{21}(u), n(u)\rangle & \langle f^{22}(u), n(u)\rangle \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} f^1(u) &= (-\sin u_1, \cos u_1, 0) \\ f^2(u) &= (0,0,1) \\ n(u) &= (\cos u_1, \sin u_1, 0) \\ f^{11}(u) &= (-\cos u_1, -\sin u_1, 0) \\ f^{12}(u) &= (0,0,0) = f^{21}(u) \\ f^{22}(u) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

et donc

$$H(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Comme $f^1(\pi, 0) = (0, -1, 0)$ et $f^2(\pi, 0) = (0, 0, 1)$, on a

$$v = (0, -v_1, v_2).$$

Pour que v soit unitaire, v_1 et v_2 doivent vérifier

$$\|v\|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v_1^2 + v_2^2 = 1$$

c. On a

$$k_{f(0,\pi)}(v) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -v_1^2$$

et comme v unitaire, d'après la question précédente
$k_{f(0,\pi)}(v) = v_2^2 - 1$

d.

- le minimum est atteint pour $v_2 = 0$, et comme

$$v_1^2 + v_2^2 = 1$$

on a $v_1 = \pm 1$ et $v = \pm f^1(u)$.

- le maximum est atteint pour $v_2 = \pm 1$ (car v unitaire) et donc $v_1 = 0$ et $v = \pm f^2(u)$.