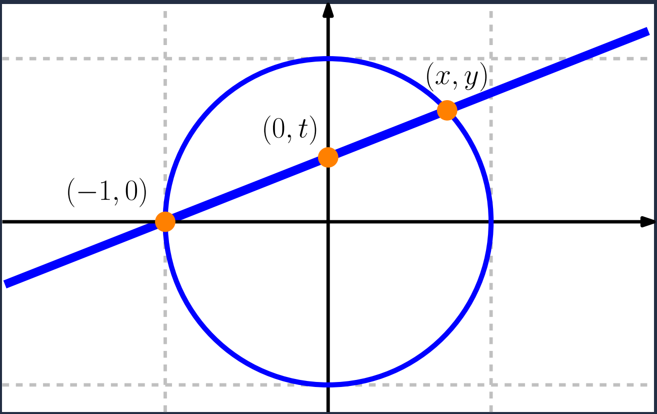
Feuille II

Exercice II-1.

(i) On a



(ii) Si $(X = -1, Y = 0)$ et $(X = x, Y = y)$ appartiennent à la même droite, on a donc

$$\begin{cases} 0 = \alpha(-1) + \beta \\ y = \alpha(x) + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = \frac{y}{x+1} \end{cases}$$

Donc $(-1, 0)$ et (x, y) appartiennent à la droite

$$Y = \left(\frac{y}{x+1}\right)X + \left(\frac{y}{x+1}\right)$$

Par définition, le point $(0, t)$ appartient également à cette droite, donc

$$t = \frac{y}{x+1}$$

(iii) On sait que

$$\left\{\begin{array}{l} t = \frac{y}{x+1} \\ (x,y) \in \mathcal{C} \\ (x,y) \neq (-1,0) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} t = \frac{y}{x+1} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ (x,y) \neq (-1,0) \end{array}\right.$$

Rq. La deuxième équation est de degré 2, il y aura deux solutions. Il faudra donc en éliminer une avec la 3e condition.

On travaillant sur les deux première équations :

$$\left\{\begin{array}{l} y = t(x+1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = t(x+1) \\ x^2 + t^2(x+1)^2 = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = t(x+1) \\ x^2(1+t^2) + 2t^2x + t^2 - 1 = 0 \end{array}\right.$$

On cherche à exprimer x en fonction de t, pour ça on cherche les racines du polynômes de degré 2 en x. Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta = (2t^2)^2 - 4(t^2+1)(t^2-1) = 4$$

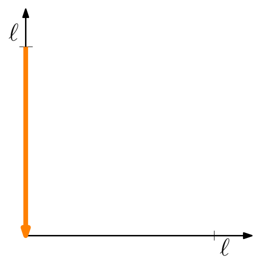
et donc les racines sont

$$x = \frac{-2t^2 \pm 2}{2(t^2+1)} = \frac{-t^2 \pm 1}{t^2+1}$$

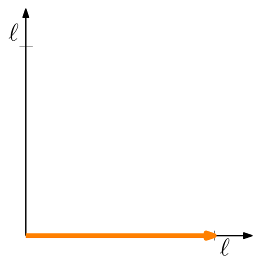
Comme $x \neq -1$, on a donc

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

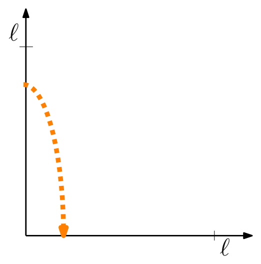
Exercice II-2. (i)



si $p = a$,

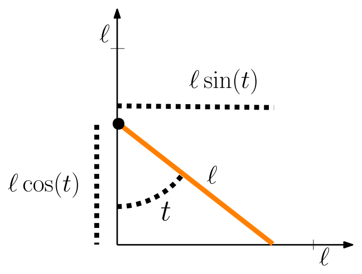


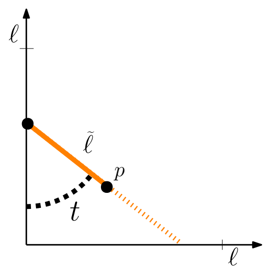
si $p = b$,



si p quelconque, la courbe va ressembler à quelque chose comme ça, mais on ne sait pas encore exactement quoi.

Exercice II-2. (ii)

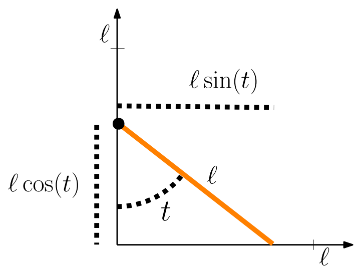


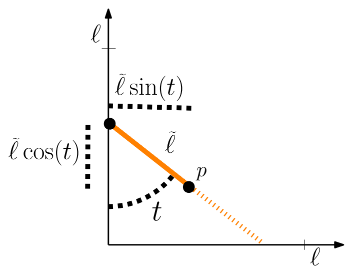


A gauche: en utilisant l'angle t, pour toute la barre, on obtient les valeurs sur l'image de gauche.

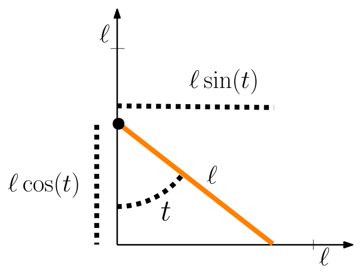
A droite: pour un point p sur la barre, qu'est-ce qu'on obtient ?

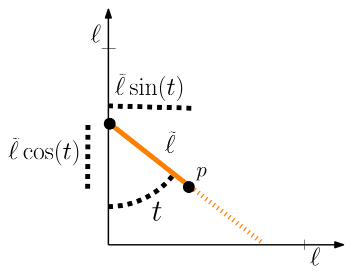
Exercice II-2. (ii)





Exercice II-2. (ii)





On a donc

$$c(t) = (\widetilde{\ell} \sin(t), \quad (\ell - \widetilde{\ell}) \cos(t))$$

Notons que

$$\frac{c_1^2}{\widetilde{\ell}^2} + \frac{c_2^2}{(\ell - \widetilde{\ell})^2} = 1$$

donc c'est une ellipse.

(iii)
$c'(t) = (\widetilde{\ell}\cos(t),\ -(\ell - \widetilde{\ell})\sin(t))$
$c'(0) = (\widetilde{\ell},\ 0)$
$c'(\pi/2) = (0,\ (\widetilde{\ell} - \ell))$

(iv) Si $\widetilde{\ell} = \ell/2$ il s'agit d'un cercle (de rayon $\ell/2$, de centre 0).