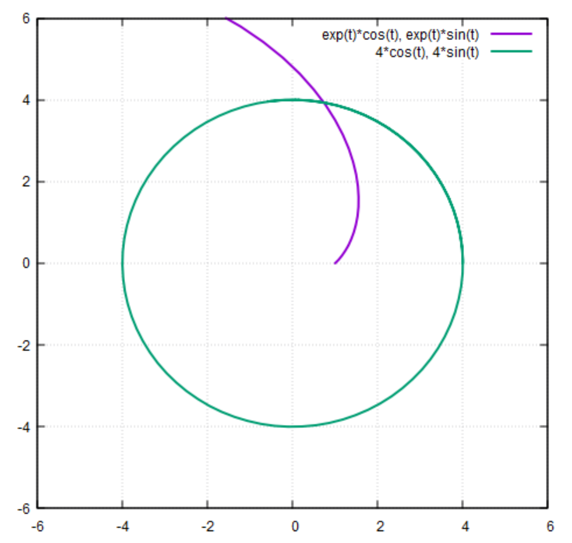
Feuille III

Exercice III-1. (a)



Parenthèse sur les coordonnées polaires

Soit une courbe en "coordonnées polaires"

$$c(t) = (r(t),\ \theta(t)) \qquad \text{(polaire)}$$

Son écriture en coordonnées cartésiennes est donc

$$c(t) = (r(t)\cos(\theta(t)),\ r(t)\sin(\theta(t))) \qquad \text{(cartesien)}$$

En coordonnée polaire, les courbes s'écrivent

$$\gamma(t) = (e^t, t), \quad \delta_R(s) = (R, s).$$

(b) Soient t_0 et s_0 tels que $\gamma(t_0) = \delta_R(s_0)$.

En cartésien.

Comme δ_R est le cercle de rayon R de centre 0, y a-t-il un point de la courbe γ de norme R ?

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2} = \cdots = e^t$$

Il y a un point d'intersection pour t_0 tel que

$$e^{t_0} = R \iff t_0 = \ln R$$

(si $R \in [1, e^{2\pi}]$ car $t \in [0, 2\pi]$). Puis

$$\gamma(t_0) = \delta_R(s_0) \iff \ldots \iff s_0 = \ln R$$

En polaire.

$$\gamma(t_0) = \delta_R(s_0) \iff (e^{t_0}, t_0) = (R, s_0) \iff s_0 = t_0 = \ln R$$

(c) Calcul des vecteurs tangents

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t)\right)\\ \delta_R'(s) &= (-R\sin s,\ R\cos s)\end{aligned}$$

(d) Rappel: $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta$

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\langle \gamma'(t_0), \delta'(s_0)\rangle}{\|\gamma'(t_0)\|\|\delta'(s_0)\|}\\ &= \frac{Re^{t_0}\Big((\cos t_0 - \sin t_0)(-\sin s_0) + (\cos t_0 + \sin t_0)\cos s_0\Big)}{e^{t_0}\|(\cos t_0 - \sin t_0, \cos t_0 + \sin t_0)\|R}\\ &= \frac{1}{\|(\cos t_0 - \sin t_0, \cos t_0 + \sin t_0)\|} \quad \text{car } t_0 = s_0\\ &= \cdots = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

d'où $\theta = \pi/4$.

Exercice III-2. On dérive

$$c'(t) = (\frac{e^t}{2}, \frac{-e^{-t}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

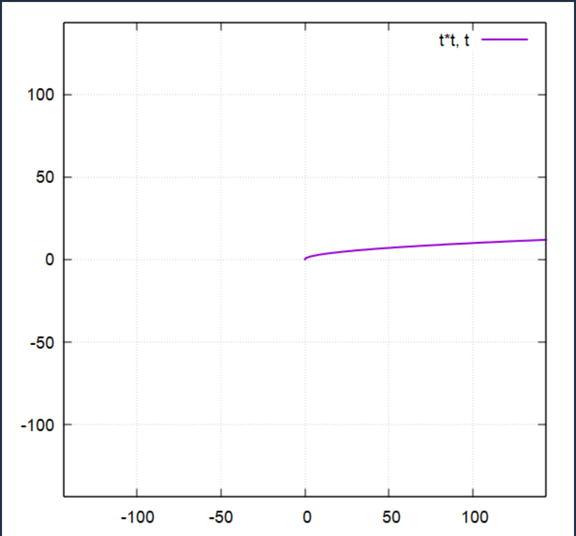
donc

$$\begin{aligned}
\|c'(t)\| &= \frac{1}{2}\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} \\
&= \frac{1}{2}e^{-t}\sqrt{e^{4t} + 1 + 2e^{2t}} \\
&= \frac{1}{2}e^{-t}\sqrt{(e^{2t} + 1)^2} \\
&= \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t
\end{aligned}$$

Finalement

$$\ell(c) = \int_0^5 \|c'(t)\| dt = \int_0^5 \cosh t \; dt = \sinh 5$$

Exercice III-3. (a)



(b) Soit p le point d'intersection entre c et $\mathcal{C}$, donc

$$\begin{cases} p \in c \\ p \in \mathcal{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists t_0 \in [0,12],\ p = c(t_0) \\ p \in \mathcal{C} = \text{ cercle de rayon } 1/2 \end{cases}$$

En mettant les deux conditions ensemble, on cherche t_0 tel que

$$\|c(t_0)\| = \frac{1}{2} \Rightarrow (t_0^2)^2 + t_0^2 = (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow t_0^4 + t_0^2 - \frac{1}{4} = 0$$

Les racines du polynôme $X^2 + X - \frac{1}{4}$ sont $\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$, donc

$$t_0^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} (\text{car } t_0^2 \geq 0) \text{ et } t_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

Le point d'intersection est donc

$$p = c(t_0) = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$$

(c) Une paramétrisation possible est

$$\mathcal{C}(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t) \text{ et donc } \mathcal{C}'(t) = (-\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos t)$$

On remarque que pour un point (a, b) de $\mathcal{C}$, le vecteur tangent en CE point est $(-b, a)$ ($\times$ une constante selon votre paramétrisation).

Comme $p = \mathcal{C}(s_0) = c(t_0)$, pour un certain s_0. Avec la remarque précédente, on a

$$\mathcal{C}'(s_0) = \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$$

(d) On dérive c

$$c'(t) = (2t, 1)$$

Rappel: $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta$

On cherche $\cos\theta$

$$\cos\theta \quad = \quad \frac{\langle c'(t_0), \mathcal{C}'(s_0) \rangle}{\|c'(t_0)\|\|\mathcal{C}'(s_0)\|}$$

Pour cela, on calcule les termes

$$\begin{cases} \langle c'(t_0), \mathcal{C}'(s_0) \rangle = -2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ \|c'(t_0)\|\|\mathcal{C}'(s_0)\| = \sqrt{2\sqrt{2}-1}\frac{1}{2} \end{cases}$$

On obtient

$$\cos\theta \quad = \quad \frac{-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}$$

(e) On veut calculer la longueur

$$\int_0^{t_0} \|c'(t)\| dt \quad = \quad \int_0^{t_0} \sqrt{1+(2t)^2} dt$$

On cherche un changement de variable. On sait qu'on a

$$1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y, \quad \forall y.$$

L'idée est donc de transformer "$1+(2t)^2$" en "$1+\sinh^2 y$". Pour cela, on pose

$$2t = \sinh y \Rightarrow \begin{cases} \text{arcsinh } 2t = y \\ 2dt = dy \cosh y \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_0} \|c'(t)\| dt &= \int_0^{t_0} \sqrt{1+4t^2}\, dt \\
&= \int_0^{y_0 = arcsinh\, 2t_0} \sqrt{\cosh^2 y}\, \frac{\cosh y}{2} dy \\
&= \int_0^{arcsinh\, 2t_0} \frac{\cosh^2 y}{2} dy \\
&= \int_0^{arcsinh\, 2t_0} \frac{\cosh 2y + 1}{4} dy \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^{arcsinh\, 2t_0} \cosh 2y dy + \int_0^{arcsinh\, 2t_0} 1 dy\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sinh(2 arcsinh\, 2t_0) + arcsinh\, 2t_0\right) \\
&= \frac{1}{4}(\sinh(arcsinh\, 2t_0)\cosh(arcsinh\, 2t_0) + arcsinh\, 2t_0) \\
&= \frac{2t_0 \cosh(arcsinh\, 2t_0) + arcsinh\, 2t_0}{4}
\end{aligned}
$$

Exercice III-4. (a) Le vecteur tangent est

$$c'(t) \quad = \quad \cdots = \left(\frac{4t}{(t^2+1)^2}, \frac{-2t^2+2}{(t^2+1)^2}\right)$$

On calcule la longueur de c

$$\begin{aligned}
\ell(c) \quad &= \quad \textstyle\int_0^1 \|c'(t)\| dt = \cdots \\
&= \quad \int_0^1 \frac{2\sqrt{t^4+2t^2+1}}{(t^2+1)^2} dt = \int_0^1 \frac{2\sqrt{(t^2+1)^2}}{(t^2+1)^2} dt = \int_0^1 \frac{2}{t^2+1} dt \\
&= \quad 2\int_0^1 (\arctan t)' dt = 2(\arctan 1 - \arctan 0) = 2(\frac{\pi}{4} - 0) \\
&= \quad \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(b) Soit $t_0 \in]0, 1[$ partageant la courbe en deux courbes de même longueur. D'après le calcul précédent, on a

$$\int_0^{t_0} \|c'(t)\| dt = 2 \arctan t_0$$

On veut donc que

$$2 \arctan t_0 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \tan \frac{\pi}{8}$$