Feuille VI

Exercice 1. (a)

$$T'(t) = \left(\frac{c'}{\|c'\|}\right)' = \frac{c''\|c'\| - c'(\|c'\|)'}{\|c'\|^2} = \frac{1}{\|c'\|}c'' - \frac{(\|c'\|)'}{\|c'\|^2}c'$$

(b) On a $T' = \alpha' \mathbf{J}(T)$, donc

$$\langle T', J(T)\rangle = \alpha'\|J(T)\|$$

Comme $\|J(T)\| = \|T\| = 1$, on obtient $\langle T', J(T)\rangle = \alpha'$.

(c) Par la question (b)

$$k(c) = \frac{\alpha'}{\|c'\|} = \frac{1}{\|c'\|}\langle T', J(T)\rangle$$

En utilisant la question (a)

$$k(c) \quad = \quad \frac{1}{\|c'\|}\langle \frac{1}{\|c'\|}c'' - \frac{(\|c'\|)'}{\|c'\|^2}c', J(\frac{c'}{\|c'\|})\rangle$$

Comme $\langle c', J(c')\rangle = 0$,

$$k(c) = \frac{1}{\|c'\|}\langle \frac{1}{\|c'\|}c'', J(\frac{c'}{\|c'\|})\rangle = \frac{1}{\|c'\|^3}\langle c'', J(c')\rangle = \frac{c_1' c_2'' - c_1'' c_2'}{\|c'\|^3}$$

Exercice 2. (a) On utilise l'exercice 1 avec

$$c'(t) = (-a\sin t, b\cos t), \quad c''(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$$

$$k(c,t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

(b) Rappel : soit t_0 tel que $k(c,t_0) \neq 0$ alors on peut poser

$$m(t_0) = c(t_0) + \frac{1}{k(c,t_0)}\mathbf{J}(T(t_0)) \quad et \quad R(t_0) = \frac{1}{|k(c,t_0)|}$$

respectivement, le centre et le rayon de cercle de courbure.

On a $T = (0,1)$ et $\mathbf{J}(T) = (-1,0)$, d'où

$$m(0) = (a,0) + \frac{b^2}{a}(-1,0) = (a - \frac{b^2}{a}, 0) \quad et \quad R(0) = \frac{b^2}{a}$$

(c) La paramétrisation classique du cercle de courbure est

$$\mathcal{C}(t) = (a - \frac{b^2}{a}, 0) + (\frac{b^2}{a}\cos t, \frac{b^2}{a}\sin t)$$

On cherche $\varphi(s) = \alpha s + \beta$ tel que $\gamma = \mathcal{C}\circ\varphi$ et tel que

$$\begin{cases} \gamma(0) = c(0) \\ \gamma'(0) = c'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{C}\circ\varphi(0) = (a, 0) \\ (\mathcal{C}\circ\varphi)'(0) = (0, b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a - \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a}\cos\beta, \frac{b^2}{a}\sin\beta) = (a, 0) \\ (-\frac{b^2}{a}\alpha\sin\beta, \frac{b^2}{a}\alpha\cos\beta) = (0, b) \end{cases}$$

On remarque que $\sin\beta = 0$ et que

$$\begin{cases} \frac{b^2}{a}\cos\beta - \frac{b^2}{a} = 0 \\ \frac{b^2}{a}\alpha\cos\beta = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\beta - 1 = 0 \\ \alpha\cos\beta = \frac{a}{b} \end{cases}$$

On a donc $\beta = 0$ et $\alpha = a/b$ et

$$\gamma(t) = (a - \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a}\cos(\frac{a}{b}t), \frac{b^2}{a}\sin(\frac{a}{b}t))$$

(d) Pour $a = 3$, $b = 2$, on a $\mathbf{J}(T) = (-1, 0)$,

$$m(0) = (a - \tfrac{b^2}{a}, 0) \quad et \quad R(0) = \tfrac{b^2}{|a|}$$

et donc

$$m(0) = (3 - \tfrac{4}{3}, 0) = (\tfrac{5}{3}, 0) \quad et \quad R(0) = \tfrac{4}{3}$$

<u>Exercice 3.</u> On utilise la formule de l'exercice 1 avec c' et c'' :

$$\begin{aligned} c'(t) &= e^t(-\sin t - \cos t, \cos t - \sin t) \\ c''(t) &= e^t(-\sin t - \cos t, \cos t - \sin t) \\ &\quad + e^t(-\cos t + \sin t, -\sin t - \cos t) \\ &= e^t(-2\cos t, -2\sin t) \end{aligned}$$

La courbure orientée est donc

$$k(c,t) = \frac{2e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t)}{e^{3t}2\sqrt{2}} = \frac{1}{e^t\sqrt{2}}$$