

NOM (en majuscules) :

PRENOM :

GROUPE :

Correction

Licence Sciences & Technologies  
Fondamentaux des mathématiques I  
Séquence 2+5, Info - Automne 2018

### Test 3 (15 min - 19 octobre 2018)

Attention : rédiger directement sur la feuille. Documents, calculatrice, téléphone non autorisés.

#### Exercice - (10 points)

1. Soient  $E$  un ensemble,  $A, B$  deux parties de  $E$  et  $f : E \rightarrow E$  une application.

- Écrire les définitions de «  $A \subset B$  » et «  $f(A)$  ». (4 points)
- Que peut-on conclure quand  $A \subset B$  et  $B \subset A$ ? (2 points)
- Montrer que pour toutes parties  $C, D \subset E$ ,  $(C \subset D) \Rightarrow (f(C) \subset f(D))$ . (4 points)

Réponse :

a)  $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$ .

$$f(A) = \{y \in E \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$$

ou encore,

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

b) Si  $A \subset B$  et  $B \subset A$ , alors  $B = A$

c) Soient  $C, D \subset E$  telles que  $C \subset D$ . Montrons que  $f(C) \subset f(D)$

Soit  $y \in f(C)$ , alors  $\exists x \in C$  tel que  $f(x) = y$ .

Or  $C \subset D$  donc  $(x \in C \Rightarrow x \in D)$ .

Ainsi  $y = f(x) \in f(D)$ .

On a montré que  $(y \in f(C)) \Rightarrow (y \in f(D))$ , donc  $f(C) \subset f(D)$ .

**Exercice - (10 points)**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2a^2 - 3a + 1 = 0$ , d'inconnue notée  $a$ . (3 pts)
2. Déterminer tous les  $x$  de  $[0, \pi]$  tels que  $\cos x = 1$ , puis tous les  $x$  de  $[0, \pi]$  tels que  $\cos x = \frac{1}{2}$ . (3 pts)
3. Résoudre dans  $[0, \pi]$  l'équation  $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ , d'inconnue notée  $x$ . (4 pts)

Réponse :

1) On résout par discriminant:  $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$   
D'où  $2a^2 - 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow \left( a = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \text{ ou } a = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = 1 \right)$

2) Soit  $x \in [0, \pi]$ , alors  $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$  et  
 $\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

3) Posons  $X = \cos(x)$ . Alors  $2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X + 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow X \in \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$   
(question 1)

Or  $X = 1 \Leftrightarrow x = 0$  et  $X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$  (question 2)

Donc  $\left\{ \begin{array}{l} 2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) + 1 = 0 \\ x \in [0, \pi] \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{3} \right\}$