Correction

**NOM (en majuscules) :**
**PRENOM :**
**GROUPE :**

Licence Sciences & Technologies
Fondamentaux des mathématiques I
Séquence 2+5, Info - Automne 2018

# Test 7 (20 min - 30 novembre 2018)

**Attention :** rédiger directement sur la feuille. Documents, calculatrice, téléphone non autorisés.

**Exercice 1 - (10 points)**

1. Calculer par l'algorithme d'Euclide le pgcd de 150 et 54. (3 pts)
En déduire une relation de Bézout entre 150 et 54. (3 pts)
2. Trouver le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $37^{33}$. (4 pts)

**Réponse :**

$150 = 2 \times 54 + 42$
$54 = 1 \times 42 + 12$
$42 = 3 \times 12 + 6$ → le pgcd de 150 et 54 est 6
$12 = 2 \times 6 + 0$

---

$6 = 42 - 3 \times 12 = 42 - 3(54 - 42)$
$= 42 - 3.54 + 3.42 = 4.42 - 3.54$
$= 4(150 - 2.54) - 3.54 = 4.150 - 8.54 - 3.54$

$6 = 4.150 - 11.54$

---

$37 \equiv 35 + 2 \, [7]$
$\Rightarrow 37 \equiv 2 \, [7]$

De plus,
$2 \equiv 2 \, [7]$
$2^2 \equiv 4 \, [7]$
$2^3 \equiv 1 \, [7]$
$(2^4 \equiv 2 \, [7])$

et donc
$37^{33} \equiv 2^{33} \, [7]$
$\equiv (2^3)^{11} \, [7]$
$\equiv 1^{11} \, [7]$

$\Rightarrow 37^{33} \equiv 1 \, [7]$

**Exercice 2 - (10 points)**

1. Calculer $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$. (3 pts)

$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

2. Calculer $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+9} - x$. (3 pts)

3. Soit $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^x & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ si elle existe. (4 pts)

**Réponse :**

- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$

car défini en $x=2$

- On a :

$$\sqrt{x^2+9} - x = \frac{(\sqrt{x^2+9} - x)(\sqrt{x^2+9} + x)}{\sqrt{x^2+9} + x} = \frac{(\sqrt{x^2+9})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+9} + x}$$

comme $x^2+9$ positif : $(\sqrt{x^2+9})^2 = |x^2+9| = x^2+9$

d'où $\sqrt{x^2+9} - x = \frac{x^2+9-x^2}{\sqrt{x^2+9}+x} = \frac{9}{\sqrt{x^2+9}+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1+x^2 = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)}$ or $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \boxed{0}$ et $\lim_{Y\to \boxed{0}} e^Y = 1$

d'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

D'où la limite de $f$ en 0 <u>existe</u> et vaut 1.

(car $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$)