TD 9 - correction

Exercice 1.1.

Le segment $\overline{pq}$ peut être paramétré par

$$\begin{aligned} c(t) &= (1-t)p + tq = p + t(q-p) \\ &= ((1-t)-t, (1-t)+t, -(1-t)+t) \\ &= (1-2t, 1, -1+2t) \end{aligned}$$

pour $t \in [0,1]$.

Rotation dans un plan ? avec une matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(Vous pouvez vérifier avec le nombre complexe $z = x + iy$ que la multiplication de la matrice précédente avec $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donne $= e^{i\theta} z$)

Rotation dans $\mathbb{R}^3$? On prend la matrice précédente, et on choisit un axe de rotation:

en fixant O_{x_1}

$$Rot(\theta, O_{x_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

en fixant O_{x_2}

$$Rot(\theta, O_{x_2}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

en fixant O_{x_3}

$$Rot(\theta, O_{x_3}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(t,\theta) &= Rot(\theta, O_{x_3})c(t)^T \\ &= ((1-2t)\cos\theta - \sin\theta, (1-2t)\sin\theta + \cos\theta, -1+2t) \end{aligned}$$

avec $(t,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$.

Exercice 2. On a

$$\begin{aligned}\gamma_{\pi+\theta}(-t) &= (R+(-t)r\sin(\pi+\theta), 0, (-t)r\cos(\pi+\theta))\\ &= (R+(-t)r(-\sin(\theta)), 0, (-t)r(-\cos(\theta)))\\ &= (R+tr\sin(\theta), 0, tr\cos(\theta))\\ &= \gamma_\theta(t)\end{aligned}$$

Comme $t \in [-1,1]$, l'image de $\gamma_{\pi+\theta}$ et l'image de γ_θ sont le même segment, mais pas parcourut dans le même sens.

On a

$$
\begin{aligned}
f(t,\theta) &= Rot(2\theta, 0_z)\gamma_\theta(t) \\
&= (\cos(2\theta)(R + tr\sin(\theta)), \sin(2\theta)(R + tr\sin(\theta)), tr\cos(\theta))
\end{aligned}
$$

Pour $t = 0$, on a

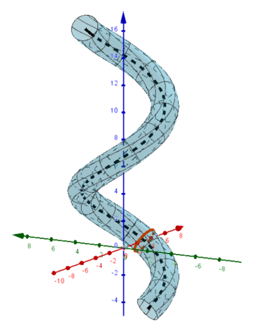
$$
f(0,\theta) = (R\cos(2\theta), R\sin(2\theta), 0)
$$

qui est un cercle dans le plan Oxy.

Exercice 3. D'après la formule du cours, on a

$$f(u,v) = \gamma(u) + \cos(v) N(u) + \sin(v) B(u), \quad (u,v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$$

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 3\cos(u) & -\cos(u)\cos(v) & +\frac{2}{\sqrt{13}} \sin(u)\sin(v) \\ 3\sin(u) & -\sin(u)\cos(v) & -\frac{2}{\sqrt{13}} \cos(u)\sin(v) \\ 2u & & +\frac{3}{\sqrt{13}} \sin(v) \end{pmatrix}$$



Exercice 4.

1. D'après le cours, la surface réglée associée à α et β est donnée par

$$f(t,s) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t), \quad (t,s) \in \mathbb{R} \times [0,1]$$

On a donc, pour $(t,s) \in \mathbb{R} \times [0,1]$,

$$\begin{aligned} f(t,s) &= (1-s)(0,0,t) + s(\cos t, \sin t, t) \\ &= (s\cos t, s\sin t, t) \end{aligned}$$

2. On calcule la valeur de $f^1 = \frac{\partial}{\partial t} f$ et de $f^2 = \frac{\partial}{\partial s} f$:

$$\begin{aligned} f^1(t,s) &= (-s\sin t, s\cos t, 1) \quad \text{-> ne s'annule jamais} \\ f^2(t,s) &= (\cos t, \sin t, 0) \quad \text{-> ne s'annule jamais} \end{aligned}$$

(la troisième composante de f^1 ne s'annule jamais, pour f^2 le sin et le cos ne peuvent pas s'annuler en même temps)

Mais ce n'est pas suffisant pour montrer qu'une surface est régulière...
Deux choix équivalents:
- montrer que f^1 et f^2 sont linéairement indépendants,
- montrer que la matrice suivante est de rang 2 :

$$[f^1, f^2] \;=\; \begin{pmatrix} -s\sin t & \cos t \\ s\cos t & \sin t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Objectif: montrer qu'on peut toujours trouver une sous-matrice de taille 2×2 de déterminant non-nul.
1er cas. Si $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$[f^1, f^2] \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm s & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

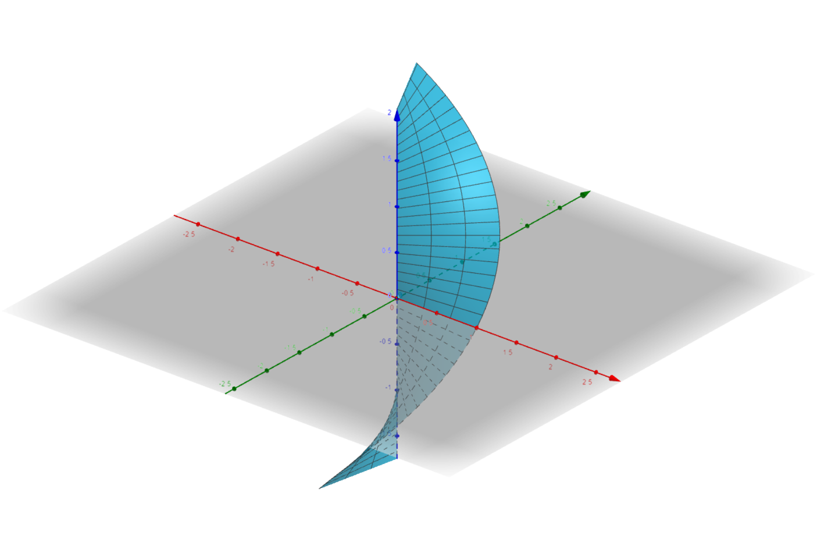
le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ est toujours $\neq 0$.

2e cas. Si $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $\sin t \neq 0$ et pour la matrice

$$[f^1, f^2] \;=\; \begin{pmatrix} -s\sin t & \cos t \\ s\cos t & \sin t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le déterminant $\begin{vmatrix} s\cos t & \sin t \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\sin t$ est toujours $\neq 0$.

Dans tout les cas, la matrice $[f^1, f^2]$ est de rang 2.



-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5