# Feuille X

**Exercice 1.**

**1.** On commence par calculer les dérivées partielles de $f$ :

$$f^1(u) = (-\sin u_1, 0, \cos u_1), \quad f^2(u) = (0, 1, 0)$$

- $\forall u$ on a $\|f^1(u)\| = 1$, donc $f^1(u)$ ne s'annule jamais.
- $\forall u$ la 2e composante ne s'annule jamais, donc $f^2(u) \neq (0, 0, 0)$ pour tout $u$
- on veut savoir si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^1(u) = \lambda f^2(u)$. La 2 composante implique $\lambda = 0$. En remplaçant dans la 1 et la 3e composantes, on a

$$\begin{cases} -\sin(u_1) = 0 * 0 \\ \cos(u_1) = 0 * 0 \end{cases}$$

  comme les deux ne peuvent pas s'annuler en même temps pour le même $u_1$, c'est impossible. Donc les vecteurs $f^1(u)$ et $f^2(u)$ sont indépendants pour tout $u$.

On en déduit que $f$ est régulière pour tout $u$.

**2.** Les composantes du tenseur métrique sont

$$\begin{aligned} g_{1,1}(u) &= \langle f^1(u), f^1(u)\rangle = 1 \\ g_{1,2}(u) &= \langle f^1(u), f^2(u)\rangle = 0 \\ g_{2,1}(u) &= \langle f^2(u), f^1(u)\rangle = 0 \\ g_{2,2}(u) &= \langle f^2(u), f^2(u)\rangle = 1 \end{aligned}$$

Pour $A = (a_1, a_2)_u$ et $B = (b_1, b_2)_u$, on a donc

$$g(A, B) = \sum_{i,j=1}^{2} a_i b_j g_{i,j}(u) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

La matrice du tenseur métrique est

$$g_u = \begin{pmatrix} g_{1,1}(u) & g_{1,2}(u) \\ g_{2,1}(u) & g_{2,2}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**3.a** Pour $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\gamma(t) \quad = \quad f \circ c(t) = (-\cos(\rho \cos t), \rho \sin t, -\sin(\rho \cos t))$$

**3.b** Sa dérivée est donnée par

$$\gamma'(t) \quad = \quad (-\rho \sin t \sin(\rho \cos t), \rho \cos t, \rho \sin t \cos(\rho \cos t))$$

de norme

$$\|\gamma'(t)\| \quad = \quad ... = \rho$$

La longueur de $\gamma$ est donc

$$\ell(\gamma) \quad = \quad \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = 2\pi\rho$$

**3.c** En utilisant le tenseur métrique, on a

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))}dt$$

mais

$$c'(t) = (-\rho \sin t, \rho \cos t)$$

et donc

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 \sin^2 t + \rho^2 \cos^2 t}dt = 2\pi\rho$$

**Exercice 2.**

**1.** On commence par calculer les dérivées partielles de $f$

$$
\begin{aligned}
f^1(u) &= (-\cos u_2 \sin u_1, \cos u_2 \cos u_1, 0) \\
f^2(u) &= (-\sin u_2 \cos u_1, -\sin u_2 \sin u_1, \cos u_2)
\end{aligned}
$$

Les coefficients du tenseur métrique sont donc

$$
\begin{aligned}
g_{1,1}(u) &= \langle f^1(u), f^1(u) \rangle = \cos^2 u_2 \\
g_{1,2}(u) &= g_{2,1}(u) = \langle f^1(u), f^2(u) \rangle = 0 \\
g_{2,2}(u) &= \langle f^2(u), f^2(u) \rangle = 1
\end{aligned}
$$

Donc la matrice du tenseur métrique donc donnée par

$$
G_u = \begin{pmatrix} \cos^2 u_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

**2.** Pour calculer un angle entre deux vecteurs tangents $f_*(A)$ et $f_*(B)$ en un point d'une surface, on peut utiliser le tenseur métrique !

$$\cos(\theta) = \frac{\langle f_*(A), f_*(B)\rangle}{\|f_*(A)\|\|f_*(B)\|} = \frac{G(A,B)}{\sqrt{G(A,A)}\sqrt{G(B,B)}}$$

Ici, pour $f_*(A) = \eta'(0)$, $f_*(B) = \gamma'(0)$, on a

$$\cos(\theta) = \frac{G_u(a'(0), b'(0))}{\sqrt{G_u(a'(0), a'(0))}\sqrt{G_u(b'(0), b'(0))}}$$

avec $u$ tel que $f(u)$ est le point d'intersection des deux courbes. Comme $a'(0) = (0,1)$, $b'(0) = (1, h'(0))$, $G_{(0,0)} = I_2$ la matrice identité, on obtient

$$\cos(\theta) = \frac{h'(0)}{\sqrt{1 + (h'(0))^2}}$$

3. On utilise la formule (3.2) du cours :

$$\begin{aligned}
aire(f(\Omega_\theta)) &= \int\int_{\Omega_\theta} \Big(\det G(u)\Big)^{1/2} du_1\, du_2 \\
&= \int_{u_2=-\theta}^{\theta} \int_{u_1=0}^{2\pi} \Big(\det G(u)\Big)^{1/2} du_1\, du_2 \\
&= \int_{u_2=-\theta}^{\theta} \int_{u_1=0}^{2\pi} |\cos u_2|\, du_1\, du_2 \\
&= \int_{u_2=-\theta}^{\theta} 2\pi |\cos u_2|\, du_2 \\
&= 2\pi \Big[\sin u_2\Big]_{u_2=-\theta}^{\theta} = 2\pi(2\sin\theta)
\end{aligned}$$

car $\cos u_2 > 0$ sur $]-\theta, \theta[$.

**Exercice 3. a.** Pour $(u_1, u_2) \in D$, on a

$$\begin{aligned} f^1(u_1,u_2) &= (1,0,\phi^1(u_1,u_2)) \\ f^2(u_1,u_2) &= (0,1,\phi^2(u_1,u_2) \end{aligned}$$

- $\forall u$, la 1ere composante ne s'annule jamais, donc $f^1(u)$ ne s'annule jamais;
- $\forall u$, la 2ere composante ne s'annule jamais, donc $f^1(u)$ ne s'annule jamais;
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^1(u) = \lambda f^2(u)$, donc

$$\begin{cases} 1 = 0 \\ 0 = \lambda \\ \phi^1 = \lambda\phi^2 \end{cases}$$

  La 1e équation est impossible, donc $f^1(u)$ et $f^2(u)$ ne sont pas colinéaires.

Donc il n'y a pas de point singulier, donc $f$ régulière $\forall u$.

**b.** La matrice du tenseur métrique est

$$
\begin{aligned}
G(u) &= \begin{pmatrix} \langle f^1(u), f^1(u)\rangle & \langle f^1(u), f^2(u)\rangle \\ \langle f^2(u), f^1(u)\rangle & \langle f^2(u), f^2(u)\rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+(\phi^1(u))^2 & \phi^1(u)\phi^2(u) \\ \phi^1(u)\phi^2(u) & 1+(\phi^2(u))^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c. Le paramétrage conserve les longueurs si et seulement si

$$G(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Donc le paramétrage de $f$ conserve les longueurs si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^1(u)\phi^2(u) = 0 \\ 1 + (\phi^2(u))^2 = 1 \\ 1 + (\phi^1(u))^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi^1(u)\phi^2(u) = 0 \\ (\phi^2(u))^2 = 0 \\ (\phi^1(u))^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi^2(u) = 0 \\ \phi^1(u) = 0 \end{array} \right.$$

donc si et seulement si $\phi(u)$ est constante.

**d.** Le paramétrage conserve les angles si et seulement si $G$ est une matrice scalaire (th 3.2.5), ie

$$G(u) \quad = \quad \lambda Id, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Donc le paramétrage de $f$ conserve les angles si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^1(u)\phi^2(u) = 0 \\ 1 + (\phi^2(u))^2 = 1 + (\phi^1(u))^2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi^1(u)\phi^2(u) = 0 \\ (\phi^2(u))^2 = (\phi^1(u))^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \phi^2(u) = \phi^1(u) = 0$$

donc si et seulement si $\phi(u)$ est constante.

**e.** Le paramétrage conserve les aires si et seulement si $\det G(u) = 1$ pour tout $u$ (la remarque après l'équation (3.2) du cours).
Donc le paramétrage de $f$ conserve les aires si et seulement si

$$\begin{aligned}
& (1+(\phi^1(u))^2)(1+(\phi^2(u))^2) - (\phi^1(u)\phi^2(u))^2 = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 1+(\phi^1(u))^2+(\phi^2(u))^2+(\phi^1(u)\phi^2(u))^2 - (\phi^1(u)\phi^2(u))^2 = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (\phi^1(u))^2+(\phi^2(u))^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (\phi^1(u))^2 = (\phi^2(u))^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \phi^1(u) = \phi^2(u) = 0
\end{aligned}$$

donc si et seulement si $\phi(u)$ est constante.