Feuille I

Exercice I-1.

(i) Soient $I = [0,1]$ et $c_i(t) = (3-4t, 2-t)$.

- Calcul des extrémités de c_i:

$$c_i(0) = (3,2) \text{ et } c_i(1) = (-1,1).$$

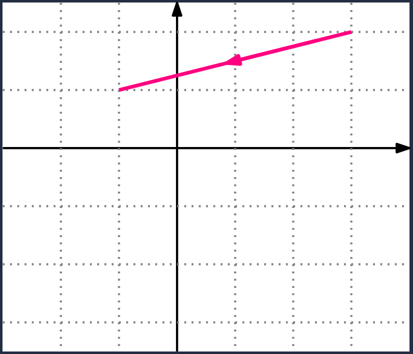
D'après le cours, un segment de p à q peut s'écrire $p + t(q-p)$ pour $t \in [0,1]$. Est-ce qu'on retrouve la même paramétrisation ?

Soient $p = c_i(0) = (3,2)$ et $q = c_i(1) = (-1,1)$, alors

$$p + t(q-p) \quad = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$
\begin{aligned}
p + t(q - p) &= (3,2) + t\Big[(-1,1) - (3,2)\Big] \\
&= (3,2) + t(-4,-1) \\
&= (3 - 4t, 2 - t)
\end{aligned}
$$

On retrouve bien c_i.

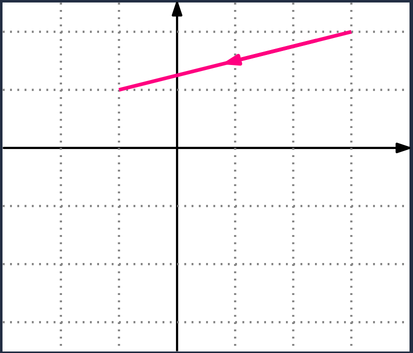


(ii) Soient $I = [-1, 1]$ et $c_{ii}(t) = (1 - 2t, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t)$.

- Calcul des extrémités de c_{ii}:

$$c_{ii}(0) = (3, 2) \text{ et } c_{ii}(1) = (-1, 1).$$

On a le même segment

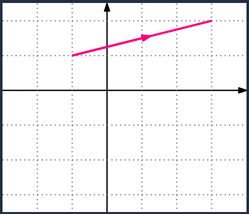


(iii) Soient $I = [0,1]$ et $c_{iii}(t) = (3 - 4(1-t), 2 - (1-t))$.

- Calcul des extrémités de c_{iii}:

$$c_{iii}(1) = (3,2) \text{ et } c_{iii}(0) = (-1,1).$$

On a le même segment, mais parcouru dans le sens inverse



Remarque:

$$c_{iii}(t) = (3 - 4(1-t), 2 - (1-t)) = c_i \circ \Big(\varphi : t \mapsto (1-t)\Big)(t)$$

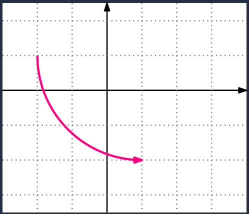
Comme l'image de I par φ est $[0,1]$, l'image de c_{iii} est la même que l'image de c_i. De plus, comme $\varphi'(t) < 0$ le sens est inversé par rapport à (i).

Exercice I-2.

(i) On peut paramétrer le cercle ENTIER de rayon $r = 3$ et de centre $p = (1, 1)$ par

$$\begin{array}{rccc} \tilde{c}: & [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & p + r(\cos t, \sin t) = (1 + 3\cos t, 1 + 3\sin t) \end{array}$$

L'arc qui nous intéresse est donné par $\tilde{c}(t)$ avec $t \in [\pi, 3\pi/2]$



On cherche un changement de paramètre $\varphi : [0, \pi/2] \to [\pi, 3\pi/2]$.

Soit $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, on veut

$$\begin{cases} \varphi(0) = \pi \\ \varphi(\pi/2) = 3\pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \pi \\ \alpha\frac{\pi}{2} + \beta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \pi \\ \alpha\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \pi \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

La courbe qui nous intéresse est donc $c : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{aligned} c(t) &= \tilde{c} \circ \varphi(t) \\ &= \tilde{c}(t + \pi) \\ &= (1 + 3\cos(t + \pi), 1 + 3\sin(t + \pi)) \\ &= (1 - 3\cos t, 1 - 3\sin t) \end{aligned}$$

(ii) Une paramétrisation du cercle de centre $(0,0)$ est de rayon 2 est

$$\tilde{c}(t) = (2\cos t, 2\sin t), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

On cherche un changement de paramètre $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que la nouvelle paramétrisation $c = \tilde{c} \circ \varphi$ vérifie

$$\begin{cases} c(0) = (0,2) \\ \|c'(t)\| = 3 \end{cases}$$

Par exemple, on pose $\varphi(t) = \alpha t + \beta$ et on cherche α et β.

On a

$$\|c'(t)\| \;=\; \|(\tilde{c}\circ\varphi)'(t)\| = |\varphi'(t)|\;\|\tilde{c}'(\varphi(t))\| = |\alpha|\;2$$

On choisira $\alpha > 0$ car on veut le sens de parcours trigonométrique positif.

On cherche donc α et β tels que

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{c} c(0) = (0,2) \\ \|c'(t)\| = 3 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \tilde{c}\circ\varphi(0) = (0,2) \\ 2|\alpha| = 3 \end{array}\right. \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi(0) = \frac{\pi}{2} \\ 2\alpha = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta = \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 3/2 \end{array}\right.\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} c(t) &= \tilde{c}\circ\varphi(t) \\ &= \left(\; 2\cos\left(\frac{3}{2}t + \frac{\pi}{2}\right),\; 2\sin\left(\frac{3}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)\;\right),\;\; t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice I-3.

(i) Le segment de p à q, pour $t \in [0,1]$, peut être paramétré par

$$\begin{aligned} c_1(t) &= p + t(q-p) \\ &= (-3,1,2) + t((0,0,1) - (-3,1,2)) \\ &= (-3+3t, 1-t, 2-t) \end{aligned}$$

(ii) Cette fois, on veut le même segment mais pour $t \in [3,4]$. On va utiliser un changement de paramètre φ !

$$[3,4] \xrightarrow{\varphi} [0,1] \xrightarrow{c_i} \overline{pq}$$

Par exemple, on cherche $\varphi(t) = \lambda t + \mu$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{cases} \varphi(3) = 0 \\ \varphi(4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(3)=0\\ \varphi(4)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}3\lambda+\mu=0\\ 4\lambda+\mu=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}3\lambda+\mu=0\\ \lambda=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mu=-3\\ \lambda=1\end{array}\right.$$

et donc $\varphi(t)=t-3$. De plus, $\varphi'(t)>0$, donc φ préserve le sens de parcours.
Vérification.

$$\left\{\begin{array}{ll}\varphi(3)=3-3=0 & ....ok\\ \varphi(4)=4-3=1 & ....ok\end{array}\right.$$

Le paramétrage qu'on cherche est donc, pour $t\in[3,4]$,

$$\begin{aligned} c_2(t) &= c_i\circ\varphi(t)=c_i(t-3)\\ &= (-3+3(t-3),1-(t-3),2-(t-3))\\ &= (-12+3t,4-t,5-t)\end{aligned}$$

(iii) Cette fois, on cherche

$$\begin{array}{rccc} \psi : & [1,4] & \to & [0,1] \\ & t & \mapsto & \alpha t + \beta \end{array}$$

tel que

$$\begin{cases} \psi(1) = 1 \\ \psi(4) = 0 \end{cases}$$

Attention: on inverse le sens de parcours, donc on échange les bornes d'arrivées ! On résout

$$\begin{cases} \psi(1) = 1 \\ \psi(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \qquad \dots \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4/3 \\ \alpha = -1/3 \end{cases}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} c_3(t) &= c_1 \circ \psi(t) = c_i(\frac{-1}{3}t + \frac{4}{3}) \\ &= (-3 + 3(\frac{-1}{3}t + \frac{4}{3}), 1 - (\frac{-1}{3}t + \frac{4}{3}), 2 - (\frac{-1}{3}t + \frac{4}{3})) \\ &= (1 - t, \frac{t-1}{3}, \frac{t+2}{3}) \end{aligned}$$

Exercice I-4.

On cherche

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [-\pi,\pi] & \to & [\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}] \\ & t & \mapsto & \alpha t+\beta \end{array}$$

avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, tel que

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi(-\pi)=\frac{3\pi}{4} \\ \varphi(\pi)=\frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

Puis on pourra poser $\gamma = c\circ\varphi$ car

$$[-\pi,\pi] \xrightarrow{\varphi} [\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}] \xrightarrow{c} \text{Image de } c$$

On résout le système

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi(-\pi) = \frac{3\pi}{4} \\ \varphi(\pi) = \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha(-\pi) + \beta = \frac{3\pi}{4} \\ \alpha(\pi) + \beta = \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \dots \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta = \frac{\pi}{2} \\ \alpha = \frac{-1}{4} \end{array}\right.$$

La courbe recherchée est donc

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= c \circ \varphi(t) \\ &= c(\frac{-1}{4}t + \frac{\pi}{2}) \\ &= (\frac{-1}{4}t + \frac{\pi}{2},\ \sin(-t + 2\pi),\ \ln(-2t + 4\pi)) \\ &= (\frac{-1}{4}t + \frac{\pi}{2},\ \sin(-t),\ \ln(-2t + 4\pi)) \end{aligned}$$

Exercice I-5.

(1) Pour étudier la régularité de c, on regarde si sa dérivée s'annule

$$\begin{aligned} c'(t) = (0,0,0) &\Leftrightarrow (3t^2,\ 0,\ 3t^2) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow t^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \end{aligned}$$

Donc pour $t = 0$, la courbe c a un point singulier.

(2) Remarque : On remarque que c est de la forme

$$c'(t) = p + t^3 \overrightarrow{v}$$

avec $p \in \mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$. En d'autres termes, on part du point p et on avance de t^3 dans la direction du vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$. Comme t^3 décrit $\mathbb{R}$ quand $t \in \mathbb{R}$, alors c décrit toute la droite.
Retour à l'exercice : Pour répondre à la question, on s'inspire de la paramétrisation classique des segments/droites donnée par

$$p + t(q - p)$$

avec $p, q \in \mathbb{R}^3$. On pose donc

$$\widetilde{c}(t) = (0, 2, 0) + t(1, 0, 1) = (t, 2, t)$$

Bien sûr on a la même image (on a échangé t^3 par t qui décrit tout $\mathbb{R}$ quand $t \in \mathbb{R}$) et cette paramétrisation est régulière ($c'(t) = (1, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).