Feuille IV

Exercice IV-1. (1)

On veut montrer que pour la suite de partitions

$$\sigma_n = \left\{ v_{n+1} = 0, v_n = \frac{2}{2n+1}, \ldots, v_k = \frac{2}{2k+1} \ldots, v_1 = \frac{2}{3}, v_0 = 1 \right\}$$

on a

$$\sum_k \|c_1(v_k) - c_1(v_{k-1})\| \geq \sum_{k=1}^{n+1} something(k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Soit P_n le polygone obtenu en évaluant c_1 sur σ_n. Alors

$$\begin{aligned}
\ell(P_n) &= \|c_1(v_{n+1} = 0) - c_1(v_n)\| \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} \|c_1(v_k) - c_1(v_{k-1})\| \\
&\quad + \|c_1(v_1 = \frac{2}{3}) - c_1(v_0 = 1)\|
\end{aligned}$$

On se concentre sur

$$\ell_k = \|c_1(v_k) - c_1(v_{k-1})\|$$

$$
\begin{aligned}
\ell_k &= \|(v_k - v_{k-1},\ v_k \sin(\pi/v_k) - v_{k-1}\sin(\pi/v_{k-1}))\| \\
&= \sqrt{[v_k - v_{k-1}]^2 + [v_k \sin(\pi/v_k) - v_{k-1}\sin(\pi/v_{k-1})]^2}
\end{aligned}
$$

En utilisant le fait que $v_k = \frac{2}{2k+1}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\ell_k &= \sqrt{[v_k - v_{k-1}]^2 + [v_k \sin(\pi k + \frac{\pi}{2}) - v_{k-1}\sin(\pi(k-1) + \frac{\pi}{2})]^2} \\
&= \sqrt{[v_k - v_{k-1}]^2 + [v_k(-1)^k - v_{k-1}(-1)^{k-1}]^2} \\
&= \sqrt{[v_k - v_{k-1}]^2 + [v_k + v_{k-1}]^2} \\
&= \sqrt{2v_k^2 + 2v_{k-1}^2}
\end{aligned}
$$

Rq. on veut $\ell_k \geq \mathit{something}(k)$ tel que $\sum_k \mathit{something}(k) = +\infty$

On remarque que $v_{k-1} > v_k$, on peut donc écrire

$$\ell_k > \sqrt{4v_k^2} = 2v_k$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\ell(P_n) &= \|c_1(v_{n+1}) - c_1(v_n)\| + \sum_{k=2}^{n} \ell_k + \|c_1(v_1) - c_1(v_0)\| \\
&\geq \sum_{k=2}^{n} \ell_k > \sum_{k=2}^{n} 2v_k = 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1/2} \\
&> 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} = 2\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

On a donc $\ell(P_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit que la courbe c_1 n'est pas rectifiable.

(2) On calcule la longueur de c_2 sur le domaine $[\epsilon, 1]$, $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\ell_{2,\epsilon} &= \ell(c_2([\epsilon,1])) = \int_\epsilon^1 \|c_2'(t)\| dt \\
&= \int_\epsilon^1 \sqrt{1^2 + (2t\sin\frac{\pi}{t} - \pi\cos\frac{\pi}{t})^2} dt \\
&= \int_\epsilon^1 \sqrt{1 + 4t^2\sin^2\frac{\pi}{t} + \pi^2\cos^2\frac{\pi}{t} - 4\pi t\sin\frac{\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t}} dt
\end{aligned}$$

Rq. On veut majorer $\ell_{2,\epsilon}$. Pour cela, on va utiliser

$$\begin{cases}
\sin^2\theta \leq 1, & \forall\theta \\
\cos^2\theta \leq 1, & \forall\theta \\
a - b \leq |a| + |b|, & \forall a, b \in \mathbb{R} \\
\ldots
\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\ell_{2,\epsilon} &\leq \int_\epsilon^1 \sqrt{1 + 4t^2 + \pi^2 + |4\pi t \sin\tfrac{\pi}{t} \cos\tfrac{\pi}{t}|}dt \\
&\leq \int_\epsilon^1 \sqrt{1 + 4t^2 + \pi^2 + 4\pi t}dt \\
&\leq \int_\epsilon^1 \sqrt{1 + 4 + \pi^2 + 4\pi}dt \text{ car } t \leq 1 \\
&\leq \int_\epsilon^1 \sqrt{4 \times 4^2}dt = \int_\epsilon^1 8dt = (1-\epsilon)8
\end{aligned}
$$

On a donc $\ell_{2,\epsilon} \leq 8$.

Rq. En faisant les mêmes calculs pour c_1, on aurait obtenu

$$
\int_\epsilon^1 \|c_1'(t)\|dt \leq \int_\epsilon^1 \sqrt{1 + 1 + (\frac{\pi}{t})^2 + 2\frac{\pi}{t}}dt \leq \int_\epsilon^1 \sqrt{2}(1 + \frac{\pi}{t})dt \underset{\epsilon \to 0}{\to} \infty
$$

---

(3) Soit $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ une partition quelconque et P le polygone sur c_2 associé. Alors

$$\ell(P) \;=\; \|c_2(t_1) - c_2(0)\| + \sum_{k=2}^{n} \|c_2(t_k) - c_2(t_{k-1})\|$$

On veut trouver une borne supérieure $M \in \mathbb{R}$ telle que

$$\ell(P) \leq M \quad (< +\infty)$$

telle que M ne dépende pas de la partition, ie des t_k.

Théorème. Toute courbe différentiable $c : [a, b] \to \mathbb{R}^w$ satisfait

$$\|c(a) - c(b)\| \leq \ell(c) = \int_a^b \|c'(s)\| ds$$

$$
\begin{aligned}
\ell(P) &= \|c_2(t_1) - c_2(0)\| + \sum_{k=2}^{n} \|c_2(t_k) - c_2(t_{k-1})\| \\
&\leq \sqrt{t_1^2 + (t_1^2 \sin\frac{\pi}{t_1})^2} + \sum_{k=2}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|c_2'(s)\| ds
\end{aligned}
$$

par définition de c_2, et par le théorème précédent. De plus

$$
\sin(x) \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+
$$

Donc

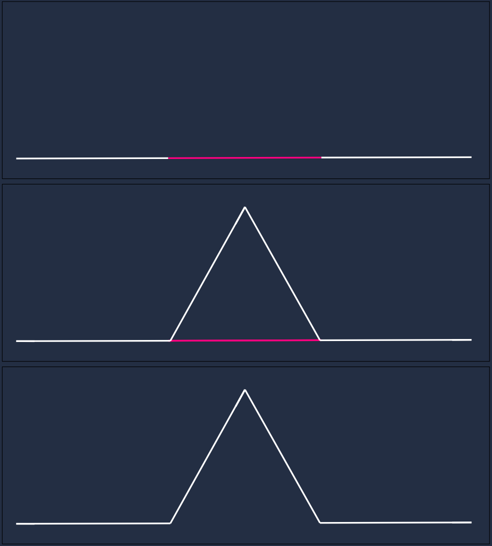
$$
\ell(P) \leq \sqrt{(\pi^2+1)t_1^2} + \int_{\epsilon=t_1}^{1=t_n} \|c_2'(s)\| ds
$$

Comme $t_1 \leq 1$, et d'après la question (2), on en déduit que

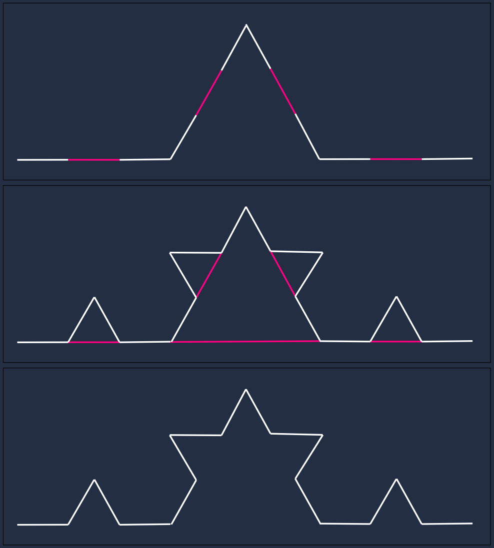
$$\ell(P) \quad \leq \quad \sqrt{(\pi^2+1)}+8 \quad (< +\infty)$$

Cette borne est vraie pour toute partition σ, donc c_2 est rectifiable.

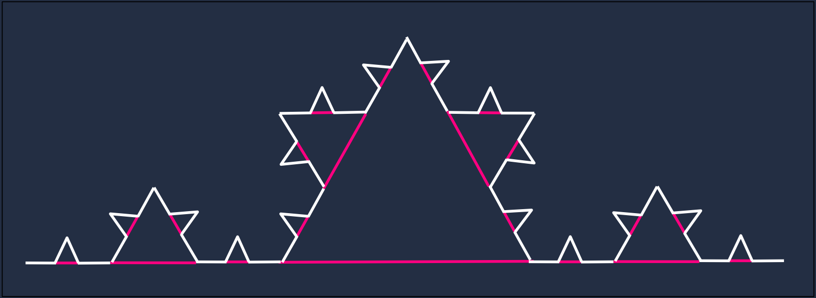
Exercice IV-2. (1) Les étapes (i)-(ii)-(iii) une première fois



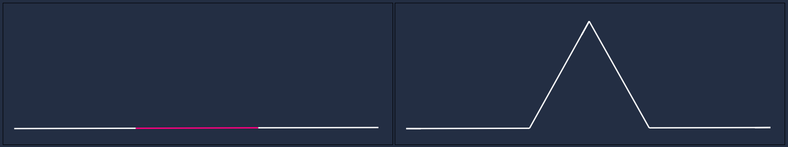
Les étapes (i)-(ii)-(iii) une deuxième fois



Après 3 répétitions des étapes



(2) On a



P_0 et P_1

on voit que

$$\ell(P_1) = \frac{4}{3}\ell(P_0)$$

On suppose que P_{n-1} est coupé en k segments. Ces segments sont tous de même longueur, ie de longueur $\frac{1}{k}\ell(P_{n-1})$. Et donc

$$\ell(P_n) = k \times \left(4 \times \frac{1}{3}(\frac{1}{k}\ell(P_{n-1}))\right)$$

On a donc

$$\ell(P_n) = \frac{4}{3}\ell(P_{n-1})$$

On en déduit que

$$\ell(P_n) = \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{4}{3}\ell(P_{n-2})\right) = \left(\tfrac{4}{3}\right)^2 \ell(P_{n-2})$$

$$\dots$$

$$\ell(P_n) = \left(\tfrac{4}{3}\right)^n \ell(P_0)$$

(3) Soit σ_n la partition donnée par les sommets de P_n. On pose

$$\ell(c,\sigma_n) = \sum_{k=1}^{n} \|c(t_k) - c(t_{k-1})\|$$

En remarquant que les sommets de P_n sont dans c, on obtient

$$\begin{aligned}
\ell(c,\sigma_n) &= \ell(P_n) \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^n \ell(P_0) \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^n \ell([0,1]) \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

donc c n'est pas rectifiable.