Feuille V

Exercice 1. (a) On dérive une première fois

$$\gamma'(t) = 6(t^2 - 1,\ \sqrt{3}t,\ t).$$

- la 1ière composante s'annule pour $t = \pm 1$
- les composantes 2 et 3 s'annulent en $t = 0$

donc $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc γ est régulière.

On calcule la norme de $\gamma'(t)$:

$$\|\gamma'(t)\| = 6\sqrt{(t^2-1)^2+3t^2+t^2} = \ldots = 6\sqrt{(t^2+1)^2} = 6(t^2+1)$$

Donc le vecteur tangent unitaire est

$$T(t) = \frac{1}{t^2+1}(t^2-1, \sqrt{3}t, t)$$

Sa dérivée est

$$T'(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2}(4t, \sqrt{3}(1-t^2), 1-t^2)$$

La première composante ne s'annule que pour $t=0$, et pour $t=0$ les autres composantes ne s'annulent pas. Donc $T'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc γ est doublement régulière.

(b) Comme c est doublement régulière, on peut calculer son repère de Frenet. On a

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\|T'(t)\| &= \frac{1}{(t^2+1)^2}\sqrt{(4t)^2 + 3(1-t^2)^2 + (1-t^2)^2} \\
&= \frac{1}{(t^2+1)^2} 2(t^2+1) \\
&= \frac{2}{t^2+1}
\end{aligned}$$

D'où

$$N(t) = \frac{1}{2(t^2+1)}(4t, \sqrt{3}(1-t^2), 1-t^2)$$

On calcule maintenant

$$\begin{aligned}
B(t) &= T(t) \wedge N(t) = \frac{1}{2(t^2+1)^2} \begin{pmatrix} t^2-1 \\ \sqrt{3}t \\ t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4t \\ \sqrt{3}(1-t^2) \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2(t^2+1)^2}(0, (1+t^2)^2, -\sqrt{3}(1+t^2)^2) \\
&= \frac{1}{2}(0, 1, -\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Le repère de Frenet est donné par $\{T(t), N(t), B(t)\}_{\gamma(t)}$.

On calcule la courbure

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

et la torsion

$$\tau(t) = \frac{-\langle B'(t), N(t)\rangle}{\|\gamma'(t)\|} = 0.$$

Exercice 2. (a) (faire un dessin)

(b) Le vecteur tangent est donné par

$$c'(t) = (-r\sin t, r\cos t, \alpha)$$

de norme $\|c'(t)\| = \sqrt{r^2+\alpha^2}$. Le vecteur tangent unitaire est donc

$$T(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}(-r\sin t, r\cos t, \alpha).$$

On a

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}}(-r\cos t, -r\sin t, 0)$$

de norme $\|T'(t)\| = \frac{r}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}$. Et donc

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|c'(t)\|} = \frac{r}{r^2 + \alpha^2}$$

Rq: La courbure de c est constante (ne dépend pas de t).

(c) On veut étudier la fonction

$$K : \alpha \longmapsto \frac{r}{r^2 + \alpha^2}$$

avec $r > 0$ fixé. On peut faire une étude de fonction classique en étudiant la dérivée, mais ici la fonction n'est pas trop compliquée. On commence par remarquer que

$$\alpha \longmapsto r^2 + \alpha^2$$

est à valeur dans $[r^2, +\infty[$, donc $\frac{1}{r^2+\alpha^2}$ est à images dans $]0, 1/r^2]$. On en déduit que $K(\alpha)$ est à image dans $]0, 1/r]$ et

- le maximum $1/r = K(0)$ est atteint pour $\alpha = 0$.
- le minimum n'est pas atteint, $K(\alpha) \to 0$ pour $\alpha \mapsto \pm\infty$.

Rq. Si $\alpha = 0$, la courbe est un cercle. Si $\alpha \to \pm\infty$, la courbe tend vers une droite.

(d) On a déjà

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}(-r\sin t, r\cos t, \alpha) \\ T'(t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}(-r\cos t, -r\sin t, 0) \end{aligned}$$

et donc

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\begin{aligned} B(t) &= T(t) \wedge N(t) = \frac{1}{\sqrt{r^2+\alpha^2}} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}(\alpha\sin t, -\alpha\cos t, r) \end{aligned}$$

On a donc le repère de Frenet $\{T(t), N(t), B(t)\}_{c(t)}$. La torsion vaut

$$\tau(t) = \frac{-\langle B'(t), N(t)\rangle}{\|c'(t)\|} = \frac{\alpha}{r^2+\alpha^2}.$$

Exercice 3.

(a1) On pose

$$g(t) = \langle c(t) - c(a), B(a) \rangle$$

Par (i) et par définition de P, on a

$$g(t) = 0 \ \ \forall t$$

(a2) En dérivant l'équation " $g(t) = 0$ ", on obtient $(\forall t \in [a, b])$

$$\begin{aligned} & g'(t) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \langle c'(t), B(a) \rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad & \langle T(t), B(a) \rangle = 0 \end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtient car c est doublement régulière, donc on peut diviser par $\|c'(t)\|$.

Donc les vecteurs $T(t)$ et $B(a)$ sont orthogonaux pour tout t.

(a3) De la même manière, en dérivant $\langle T(t), B(a) \rangle = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \langle T'(t), B(a) \rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad & \langle N(t), B(a) \rangle = 0 \end{aligned}$$

car c est doublement régulière (ie $\|T'(t)\| \neq 0$ pour tout t).

On a donc

- 3 vecteurs unitaires $T(t)$, $N(t)$, $B(a)$ pour tout t
- et ces 3 vecteurs sont orthogonaux entre eux

donc la famille $(T(t), N(t), B(a))$ est une famille orthonormale pour tout t.

(a4) Sous l'hypothèse (i) on a vu que

$$\text{la famille } (T(t), N(t), B(a)) \text{ est une orthonormale } \forall t$$

Mais par définition du repère de Frenet, on sait que

$$\text{la famille } (T(t), N(t), B(t)) \text{ est une orthonormale } \forall t$$

On a donc $B(t) = \pm B(a)$. Comme $t \mapsto B(t)$ est continue, et que $B(t) = B(a)$ pour $t = a$, on en déduit que

$$(ii) \;\; B(t) = B(a) \text{ constant } \forall t.$$

(b) On suppose (ii) et on pose $f(t) = \langle c(t) - c(a), B(t) \rangle$.

En dérivant, on a

$$f'(t) = \langle c'(t), B(t) \rangle + \langle c(t) - c(a), B'(t) \rangle$$

Par (ii), on a $B'(t) = 0$ donc

$$f'(t) = \langle c'(t), B(t) \rangle$$

et comme $\langle T(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}, B(t) \rangle = 0$, on a donc

$$f'(t) = \langle c'(t), B(t) \rangle = 0 \Rightarrow f(t) = cst.$$

Or $f(a) = 0$ et donc $f(t) = 0$ pour tout t.

Comme $B(t) = cst = B(a)$, on en déduit que $c(t) \in P$ pour tout t.

(c) Pour $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ il faut utiliser la 3e formule de Frenet-Serret

$$\frac{B'(t)}{\|c'(t)\|} = -\tau(t)N(t)$$

Pour $(ii) \Rightarrow (iii)$, si $t \mapsto B(t)$ constant, alors $B'(t) = 0$ et donc $\tau(t) = 0$ pour tout t ($N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \neq 0$ car c doublement régulière).

Pour $(iii) \Rightarrow (ii)$, si $\tau(t) = 0$ pour tout t, alors $B'(t) = 0$ et donc $t \mapsto B(t)$ constant.