Feuille 7 - La développée, le théorème de Tait-Kneser

Rappel : La développée est la courbe formée par les centres des cercles de courbure.

Exercice 1. **1.** On a $\gamma'(t) = (1, \sinh t)$

Comme la première composante ne s'annule jamais, la courbe est régulière. On calcule maintenant γ'' et on utilise la formule de la feuille précédente pour la courbure orientée :

$$\gamma''(t) = (0, \cosh t)$$

et donc

$$k(t) = \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2''(t) - \gamma_2'(t)\gamma_1''(t)}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\cosh t}{(\sqrt{1 + \sinh^2 t})^3}$$

mais $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ donc $k(t) = 1/\cosh^2 t$.

2. Le vecteur tangent unitaire est donnée par

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}(1, \sinh t) = \frac{1}{\cosh t}(1, \sinh t)$$

La développée s'écrit donc

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= (t, \cosh t) + \cosh^2 t \frac{1}{\cosh t}(-\sinh t, 1) \\ &= (t, \cosh t) + \cosh t(-\sinh t, 1) \\ &= (t - \cosh t \sinh t, 2\cosh t)\end{aligned}$$

On dérive

$$\begin{aligned}\Gamma'(t) &= (1 - \cosh^2 t - \sinh^2 t, 2\sinh t) \\ &= (-2\sinh^2 t, 2\sinh t)\end{aligned}$$

La courbe Γ n'est pas régulière en $t = 0$.

Calculons d'abord la norme de Γ' :

$$\begin{aligned}
\|\Gamma'(t)\| &= 2\sqrt{\sinh^4 t + \sinh^2 t} \\
&= 2|\sinh t|\sqrt{\sinh^2 t + 1} \\
&= 2|\sinh t|\sqrt{\cosh^2 t} \\
&= 2|\sinh t|\cosh t
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\ell(\Gamma) &= \int_{-a}^{a} 2|\sinh t|\cosh t dt \\
&= \int_0^a 2\sinh t\cosh t dt - \int_{-a}^0 2\sinh t\cosh t dt \\
&= \int_0^a \sinh 2t dt - \int_{-a}^0 \sinh 2t dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ell(\Gamma) &= \left[\frac{1}{2}\cosh 2t\right]_0^a - \left[\frac{1}{2}\cosh 2t\right]_{-a}^0 \\
&= \frac{1}{2}\cosh(2a) - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cosh(-2a)\right) \\
&= \frac{1}{2}\cosh(2a) + \frac{1}{2}\cosh(-2a) - 1 \\
&= \cosh(2a) - 1
\end{aligned}
$$

Exercice 2. On doit donc calculer

$$m(t) = c(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{J}(T_c(t))$$

Pour ça, on va utiliser la formule :

$$k(t) = \frac{c_1'(t)c_2''(t) - c_2'(t)c_1''(t)}{\|c'(t)\|^3}$$

On a

$$c'(t) = (1, 2t), \quad c''(t) = (0, 2) \Rightarrow k(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

Calculons $\mathbf{J}(T(t))$:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(1, 2t), \quad \mathbf{J}T(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t, 1)$$

La développée est donc donnée par

$$t \mapsto m(t) = (t, t^2) + \frac{1+4t^2}{2}(-2t, 1) = (-4t^3, \frac{1}{2} + 3t^2)$$

Exercice 3. Partie 1. (a)

<u>Théorème de Tait-Kneser :</u> Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe à courbure non-nulle et monotone. Alors pour tout t, $t' \in I$, avec $t \neq t'$, les cercles de courbures au points $c(t)$ et $c(t')$ sont imbriqués.

k croissant $\Rightarrow$ Par le théorème de Tait-Kneser on a

$$t < t' \Rightarrow C_\gamma(t') \subset D_\gamma(t) \quad \Rightarrow D_\gamma(t') \subset D_\gamma(t)$$

k décroissant $\Rightarrow$ Par le théorème de Tait-Kneser on a

$$t < t' \Rightarrow D_\gamma(t') \supset C_\gamma(t) \quad \Rightarrow D_\gamma(t') \supset D_\gamma(t)$$

on en déduit que

$$t < t', \quad D_c(t') = D_c(t) \Rightarrow C_c(t) = C_c(t')$$

donc le cercle de courbure est constant.

Partie 1. b)

Le centre de courbure de $\gamma(t)$ est constant donné par

$$C(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k}\mathbf{J}(T(t)) = C_0$$

On a donc

$$C(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k}\mathbf{J}(T(t)) \Rightarrow \|C_0 - \gamma(t)\| = \frac{1}{k}\|\mathbf{J}(T(t))\| = \frac{1}{k}$$

Donc l'image de γ appartient au cercle de centre C_0 de rayon $\frac{1}{k}$.

Comme γ est continue, l'image de γ est un arc de cercle (ou un cercle).

Exercice 3. Partie 2. (a) (...)
Partie 2. (b)
En utilisant la propriété de symétrie de γ, on a

$$\overline{\gamma}(s) = (\iota \circ \gamma)(1-s) = \gamma(1-(1-s)) = \gamma(s)$$

- De $\overline{\gamma}(s) = \gamma(s)$, on déduit que
$$\overline{k}(s) = k(s)$$
- De $\overline{\gamma}(s) = (\iota \circ \gamma)(1-s) = (-\gamma_1(1-s), \gamma_2(1-s))$, en utilisant la formule de la courbure orientée (...), on obtient
$$\overline{k}(s) = k(1-s)$$

donc $\overline{k}$ est croissante non-nulle ET décroissante non-nulle. Donc constante non-nulle.