Feuille 1
Matrices

Exercice 1.

Soit $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, calculer A^n.

Correction exercice 1.

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix};\ A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

Si $n=0$, $A^0=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, la relation est vraie.

Montrons que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n+1$.

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n+1\\0&1\end{pmatrix}$$

Ce qui achève la récurrence.

Si $m>0$, calculons $(A^m)^{-1}$

Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ deux vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$Y=A^mX\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&m\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=x_1+mx_2\\y_2=x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1-mx_2\\x_2=y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1-my_2\\x_2=y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-m\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

Par conséquent $(A^m)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-m\\0&1\end{pmatrix}$, or $(A^m)^{-1}=A^{-m}$

Donc $A^{-m}=\begin{pmatrix}1&-m\\0&1\end{pmatrix}$

Pour trouver A^n avec $n<0$, on pose $m=-n>0$, donc $n=-m$ et on utilise ce que l'on vient de trouver

$$A^n=A^{-m}=\begin{pmatrix}1&-m\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

Finalement, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

Exercice 2.

Soit $A=\begin{pmatrix}5&4\\4&3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et soit ${}^tX=(x_1\quad x_2)\in\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$

1. Calculer AX, ${}^tXA$ et ${}^tXAX$
2. Calculer A^{-1}, l'inverse de la matrice A.

Correction exercice 2.

1.

$$AX=\begin{pmatrix}5&4\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x_1+4x_2\\4x_1+3x_2\end{pmatrix}$$
$${}^tXA=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}5&4\\4&3\end{pmatrix}=(5x_1+4x_2\quad 4x_1+3x_2)$$

$$
\begin{aligned}
{}^tXAX &= (x_1\ x_2)\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = (5x_1+4x_2\quad 4x_1+3x_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = x_1(5x_1+4x_2)+x_2(4x_1+3x_2)\\
&= 5x_1^2+8x_1x_2+3x_2^2
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5x_1+4x_2\\ 4x_1+3x_2\end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2\end{matrix}\begin{cases}5x_1+4x_2=y_1\\ 4x_1+3x_2=y_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ 5L_2-4l_1\end{matrix}\begin{cases}5x_1+4x_2=y_1\\ -x_2=-4y_1+5y_2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}5x_1=-4x_2+y_1\\ x_2=4y_1-5y_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x_1=-4(4y_1-5y_2)+y_1\\ x_2=4y_1-5y_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x_1=-15y_1+20y_2\\ x_2=4y_1-5y_2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-3y_1+4y_2\\ x_2=4y_1-5y_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $T = \begin{pmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, où $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \in [0,1]$

Autrement dit la somme des coefficients de la première ligne vaut 1 et la somme des coefficients de la seconde ligne vaut 1.

1. Montrer que pour tout $T \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n \in E$
2. Soit $T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, montrer que $T \in E$, puis montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$T^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+2^{-n} & 1-2^{-n}\\ 1-2^{-n} & 1+2^{-n}\end{pmatrix}$$
Et vérifier que $T^n \in E$.
3. Les joueurs d'un club de football sont partagés en deux équipes : une équipe A de titulaires et une équipe B de remplaçants qui ont toutes les deux le même nombres de joueurs. L'entraîneur change la composition de ces équipes après chacun des matchs, suivant les performances des joueurs. Une étude statistique menée au cours des saisons précédentes permet d'estimer que :
   - Si un joueur fait partie de l'équipe A, la probabilité qu'il joue le match suivant est ¾.
   - Si un joueur fait partie de l'équipe B, la probabilité qu'il joue le match suivant est donc de ¼. Enzo vient d'arriver dans le club et la probabilité qu'il joue le match n est a_n et la probabilité qu'il ne joue pas le match est $b_n = 1 - a_n$. On suppose qu'il a une chance sur dix de jouer le premier match, donc $a_0 = 0{,}1$.

   Montrer que $P_n = (a_n \quad b_n)$ vérifie la relation de récurrence
$$\begin{cases}P_{n+1} = P_nT, \ \ n \in \mathbb{N}\\ P_0 = \left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right)\end{cases}$$
   Où $T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.
4. Quelle est la probabilité qu'il joue le match 1, le match n ?

Correction exercice 3.

1. Montrons d'abord que le produit de 2 matrices de E est dans E

$$T_1T_2=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 1-\alpha_1\\ \beta_1 & 1-\beta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2 & 1-\alpha_2\\ \beta_2 & 1-\beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2+(1-\alpha_1)\beta_2 & \alpha_1(1-\alpha_2)+(1-\alpha_1)(1-\beta_2)\\ \beta_1\alpha_2+(1-\beta_1)\beta_2 & \beta_1(1-\alpha_2)+(1-\beta_1)(1-\beta_2)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2+\beta_2-\alpha_1\beta_2 & \alpha_1-\alpha_1\alpha_2+1-\beta_2-\alpha_1+\alpha_1\beta_2\\ \beta_1\alpha_2+\beta_2-\beta_1\beta_2 & \beta_1-\beta_1\alpha_2+1-\beta_2-\beta_1+\beta_1\beta_2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2+\beta_2-\alpha_1\beta_2 & -\alpha_1\alpha_2+1-\beta_2+\alpha_1\beta_2\\ \beta_1\alpha_2+\beta_2-\beta_1\beta_2 & -\beta_1\alpha_2+1-\beta_2+\beta_1\beta_2\end{pmatrix}$$

On remarque que la somme des coefficients de la première ligne vaut 1, ainsi que la somme des coefficients de la seconde ligne

On pose $\alpha=\alpha_1\alpha_2+\beta_2-\alpha_1\beta_2=\alpha_1\alpha_2+\beta_2(1-\alpha_1)\leq\alpha_2+\beta_2=1$ car $1-\alpha_1\leq 1$

Et $\alpha=\alpha_1\alpha_2+\beta_2-\alpha_1\beta_2=\alpha_1\alpha_2+\beta_2(1-\alpha_1)\geq 0$ car $1-\alpha_1\geq 0$

On en déduit que $T_1T_2\in E$.

Pour $n=1$, $T^1\in E$, puis par récurrence $T^{n+1}=T^n\,T\in E$ car $T^n\in E$ et $T\in E$, ce qui montre bien que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, T^n\in E$.

2. $T=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/4\end{pmatrix}$, comme $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$ et que $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$, cela montre que $T\in E$

Pour $n=0$

$$T^0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+2^{-0} & 1-2^{-0}\\ 1-2^{-0} & 1+2^{-0}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=I$$

C'est bon

$$T^{n+1}=T^nT=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+2^{-n} & 1-2^{-n}\\ 1-2^{-n} & 1+2^{-n}\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3(1+2^{-n})+1-2^{-n} & 1+2^{-n}+3(1-2^{-n})\\ 3(1-2^{-n})+1+2^{-n} & 3(1+2^{-n})+1-2^{-n}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4+2\times 2^{-n} & 4-2\times 2^{-n}\\ 4-2\times 2^{-n} & 4+2\times 2^{-n}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2}\times 2^{-n} & 1-\frac{1}{2}\times 2^{-n}\\ 1-\frac{1}{2}\times 2^{-n} & 1+\frac{1}{2}\times 2^{-n}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+2^{-(n+1)} & 1-2^{-(n+1)}\\ 1-2^{-(n+1)} & 1+2^{-(n+1)}\end{pmatrix}$$

Ce qui achève la récurrence

3. Si Enzo jouait au n-ièmes match il a ¾ chance de jouer le $n+1$-ièmes et s'il ne jouait pas il a ¼ de le jouer donc

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n$$

Et

$$b_{n+1}=1-a_{n+1}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\right)=\frac{3}{4}(1-a_n)+\frac{1}{4}(1-b_n)=\frac{3}{4}b_n+\frac{1}{4}a_n=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{4}b_n$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases}a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\\ b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{3}{4}b_n\end{cases}\Leftrightarrow(a_{n+1}\quad b_{n+1})=(a_n\quad b_n)\begin{pmatrix}3/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/4\end{pmatrix}\Leftrightarrow P_{n+1}=P_nT$$

$$P_0=\left(\frac{1}{10}\quad 1-\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{1}{10},\frac{9}{10}\right)$$

4. $P_1=P_0T=\left(\frac{1}{10}\quad\frac{9}{10}\right)\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left(\frac{6}{5}\quad\frac{14}{5}\right)=\left(\frac{3}{10}\quad\frac{7}{10}\right)$. La probabilité a_1 qu'Enzo joue dans l'équipe A pour le match 1 est $3/10$.

$$P_1=P_0T$$

$$P_2 = P_1 T = P_0 T T = P_0 T^2$$
$$P_3 = P_2 T = P_0 T^2 T = P_0 T^3$$

Montrons par récurrence que $P_n = P_0 T^n$

Pour $n = 0$, $P_0 T^0 = P_0 I = P_0$, c'est bon

$$P_{n+1} = P_n T = P_0 T^n T = P_0 T^{n+1}$$

Ce qui achève la récurrence

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 T^n$

Par conséquent

$$P_n = \frac{1}{10}(1 \quad 9)\frac{1}{2}T^n = \frac{1}{10}(1 \quad 9)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2^{-n} & 1-2^{-n} \\ 1-2^{-n} & 1+2^{-n} \end{pmatrix} = \frac{1}{20}(1 \quad 9)T^n\begin{pmatrix} 1+2^{-n} & 1-2^{-n} \\ 1-2^{-n} & 1+2^{-n} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{20}\left(1+2^{-n}+9(1-2^{-n}) \quad 1-2^{-n}+9(1+2^{-n})\right) = \frac{1}{20}\left(10-8\times 2^{-n} \quad 10+8\times 2^{-n}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\times 2^{-n} \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times 2^{-n}\right)$$

Ce qui montre que la probabilité qu'Enzo joue le match n est

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\times 2^{-n} = \frac{1}{2}-\frac{2^{-n+1}}{5}$$

Exercice 4.

A tout nombre réel t on associe la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$$

1. Soient t_1 et t_2 deux réels. Calculer le produit matriciel $M(t_1)M(t_2)$.
2. Soit t un réel. Montrer que $M(t)$ est inversible et fournir une expression très simple de $[M(t)]^{-1}$.

Correction exercice 4.

1.

$$M(t_1)M(t_2) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t_1) & \mathrm{sh}(t_1) \\ \mathrm{sh}(t_1) & \mathrm{ch}(t_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t_2) & \mathrm{sh}(t_2) \\ \mathrm{sh}(t_2) & \mathrm{ch}(t_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t_1)\mathrm{ch}(t_2)+\mathrm{sh}(t_1)\mathrm{sh}(t_2) & \mathrm{ch}(t_1)\mathrm{sh}(t_2)+\mathrm{sh}(t_1)\mathrm{ch}(t_2) \\ \mathrm{sh}(t_1)\mathrm{ch}(t_2)+\mathrm{ch}(t_1)\mathrm{sh}(t_2) & \mathrm{sh}(t_1)\mathrm{sh}(t_2)+\mathrm{ch}(t_1)\mathrm{ch}(t_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ch}(t_1)\mathrm{ch}(t_2)+\mathrm{sh}(t_1)\mathrm{sh}(t_2) = \frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}+e^{-t_2}}{2}+\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}-e^{-t_2}}{2}$$
$$= \frac{e^{t_1+t_2}+e^{t_1-t_2}+e^{-t_1+t_2}+e^{-t_1-t_2}}{4}+\frac{e^{t_1+t_2}+e^{t_1-t_2}+e^{-t_1+t_2}+e^{-t_1-t_2}}{4}$$
$$= \frac{2e^{t_1+t_2}+2e^{-(t_1+t_2)}}{4} = \mathrm{ch}(t_1+t_2)$$

$$\mathrm{sh}(t_1)\mathrm{ch}(t_2)+\mathrm{ch}(t_1)\mathrm{sh}(t_2) = \frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}+e^{-t_2}}{2}+\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2}\frac{e^{t_2}-e^{-t_2}}{2}$$
$$= \frac{e^{t_1+t_2}+e^{t_1-t_2}-e^{-t_1+t_2}-e^{-t_1-t_2}}{4}+\frac{e^{t_1+t_2}-e^{t_1-t_2}+e^{-t_1+t_2}-e^{-t_1-t_2}}{4}$$
$$= \frac{2e^{t_1+t_2}-2e^{-(t_1+t_2)}}{4} = \mathrm{sh}(t_1+t_2)$$

Donc $M(t_1)M(t_2) = M(t_1+t_2)$

2. Comme $M(t)M(-t) = M(0) = I$ donc $\left(M(t)\right)^{-1} = M(-t)$

Exercice 5.

Soit U_n une suite de vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $U_{n+1} = AU_n$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ que $U_n = A^n U_0$.
2. Calculer U_n en fonction de n.

Correction exercice 5.

1. $A^0 U_0 = IU_0 = U_0$, c'est bon
$$U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$$
Ce qui achève la récurrence.
2. Il faut calculer A^n, ce que l'on a fait à l'exercice 1
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Par conséquent $U_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+n \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6.

Soit U_n une suite de vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $U_{n+1} = AU_n + B$, où $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne C de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui vérifie $C = AC + B$
2. Soit $V_n = U_n - C$, montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ que $V_n = A^n V_0$.
3. Calculer U_n en fonction de n.

Correction exercice 6.

1. On pose $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$$C = AC + B \Leftrightarrow C - AC = B \Leftrightarrow (I - A)C = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{5}x = 1 \\ -y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = 0 \end{cases}$$
Donc $C = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$
2.
$$V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - C = AU_n + (I - A)C - C = AU_n + C - AC - C = AU_n - AC$$
$$= A(U_n - C) = AV_n$$
Et comme dans l'exercice 4. on en déduit que
$$V_n = A^n V_0$$
3.
$$U_{n+1} - C = A^n (U_0 - C) \Leftrightarrow U_{n+1} = A^n (U_0 - C) + C$$
Le calcul de A^n est du même genre que celui de l'exercice 4, puisque la matrice est diagonale
$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5^n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$
Et donc
$$U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5^n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5^n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \times \frac{1}{5^n} \\ 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \times \frac{1}{5^n} + \frac{5}{4} \\ 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

1. Si $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,6}(\mathbb{R})$, alors peut-on effectuer les opérations $C = A + B$, $D = AB$?
   Si c'est possible quelle est la dimension de C, de D ?
2. Pour effectuer le produit de deux matrices A et B il faut que
   a. A et B aient le même nombre de lignes ?
   b. A et B aient le même nombre de colonnes ?
   c. A a autant de lignes que B de colonnes ?
   d. A a autant de colonnes de B de lignes ?
   Répondre par vrai ou faux à chaque fois.
3. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   Calculer AB et BA
4. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Expliquer pourquoi on peut calculer AB (et calculer cette matrice) et pourquoi on ne peut pas calculer BA.

Correction exercice 7.

1. A et B ne peuvent pas être additionnés car elles n'ont pas le même nombre de lignes. On aurait pu remarquer aussi qu'elles n'ont pas le même nombre de colonnes. Donc C n'existe pas.
   A a trois colonnes et B à trois lignes donc on peut les multiplier (avec A en première position et B en seconde). D existe.
   D a deux lignes et six colonnes, autrement dit $D \in \mathcal{M}_{2,6}(\mathbb{R})$
2.
   a. Faux
   b. Faux
   c. Vrai
   d. Faux
3.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 11 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

   Remarque $AB \neq BA$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   A a trois colonnes et B trois lignes, donc on peut calculer AB

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 19 & 9 \\ 6 & 8 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

   B a quatre lignes et A a deux colonnes, dont BA n'existe pas.

Exercice 8.

Calculer l'inverse, si elle existe, des matrices suivantes.

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&4\\0&0&1\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&-1&4\\-2&-1&-1\end{pmatrix}$$

Correction exercice 8.

On pose $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$$Y=A_1X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=y_1\\-x_2+4x_3=y_2\\x_3=y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2-3x_3+y_1\\x_2=4x_3-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2(-y_2+4y_3)-3y_3+y_1\\x_2=-y_2+4y_3\\x_3=y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1+2y_2-11y_3\\x_2=-y_2+4y_3\\x_3=y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-11\\0&-1&4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow X=A_1^{-1}Y$$

Avec $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-11\\0&-1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$

On pose $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$$Y=A_2X\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&-1&4\\-2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=y_1\\x_1-x_2+4x_3=y_2\\-2x_1-x_2-x_3=y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+2L_1\end{matrix}\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=y_1\\-3x_2+7x_3=y_2-y_1\\3x_1-7x_3=y_3+2y_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=y_1\\-3x_2+7x_3=y_2-y_1\\0=y_3+y_2+y_1\end{cases}$$

Si $y_3+y_2+y_1\neq 0$ il n'y a pas de solution

Si $y_3+y_2+y_1=0$, le système devient

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=y_1\\-3x_2+7x_3=y_2-y_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2+3x_3+y_1\\x_2=-\dfrac{1}{3}(7x_3-y_2+y_1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{3}(7x_3-y_2+y_1)+3x_3+y_1\\x_2=-\dfrac{1}{3}(7x_3-y_2+y_1)\end{cases}$$

Inutile d'aller plus loin, à partir du système où $y_1+y_2+y_3=0$, il était clair que l'on ne pouvait plus trouver x_1,x_2 et x_3 en fonction de y_1,y_2 et y_3. Donc la matrice A_2 n'est pas inversible.

Exercice 9.

Soit $A=\begin{pmatrix}13&-8&-12\\12&-7&-12\\6&-4&-5\end{pmatrix}$

1. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Correction exercice 9.

1. On commence par calculer A^2

$$A^2=\begin{pmatrix}13&-8&-12\\12&-7&-12\\6&-4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13&-8&-12\\12&-7&-12\\6&-4&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$A^2=I$ donc $A^{2m}=(A^2)^m=I^m=I$ et $A^{2m+1}=A^{2m}A=A$.

Cela donne A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. Comme $A^2 = I$, alors $A^{-1} = A$
   Si $m > 0, A^{-m} = (A^{-1})^m = A^m$
   Si $n < 0$, on pose $n = -m$ ($m = -n > 0$)
$$A^n = A^{-m} = (A^{-1})^m = A^m = A^{-n}$$
   Ensuite cela dépend de la parité de n.

Exercice 10.

Soit A une matrice carrée. On suppose que A vérifie l'identité $A^3 - A^2 - I = O$. Montrer que A est inversible et donner une formule simple pour A^{-1}.

Correction exercice 10.
$$A^3 - A^2 - I = O \Leftrightarrow A^3 - A^2 = I \Leftrightarrow A(A^2 - A) = I$$
Donc A est inversible et $A^{-1} = A^2 - A$

Exercice 11.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3. Calculer $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. Exprimer A^4 en fonction de A^2, A et I.

Correction exercice 11.

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   $A^3 - A^2 + A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$
   O
2. $A^3 - A^2 + A - I = O \Leftrightarrow A(A^2 - A + I) = I$ donc A est inversible et $A^{-1} = A^2 - A + I$
3. $A^3 = A^2 - A + I$ donc $A^4 = A(A^2 - A + I) = A^3 - A^2 + A = (A^2 - A + I) - A^2 + A = I$

Exercice 12.

On dit qu'une matrice carrée M est nilpotente lorsqu'il existe un $k \geq 1$ tel que $M^k = O$ et qu'elle est unipotente lorsqu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $M^k = I_n$. Soit $n \geq 1$ un entier et A et B deux matrices carrées (n, n).

1. Montrer que si AB est nilpotente, BA l'est aussi.
2. Montrer que si AB est unipotente, BA l'est aussi.

Correction exercice 12.

1. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(AB)^k = O$
   Alors
$$(BA)^{k+1} = \underbrace{(BA)(BA) \dots (BA)}_{k+1 \text{ fois}} = B\left(\underbrace{(AB)(AB) \dots (AB)}_{k \text{ fois}}\right)A = BO^kA = O$$

Donc BA est aussi nilpotentente

2. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(AB)^k = I_n$

$$(AB)^k = I_n \Leftrightarrow \underbrace{(AB)(AB)\dots(AB)}_{k \text{ fois}} = I_n \Leftrightarrow \underbrace{(AB)(AB)\dots(AB)}_{k-1 \text{ fois}}(AB) = I_n$$

Ce qui montre que AB est inversible et que l'inverse de AB, qui est $B^{-1}A^{-1}$ est aussi $\underbrace{(AB)(AB)\dots(AB)}_{k-1 \text{ fois}}$

Donc

$$(BA)^k = \underbrace{(BA)(BA)\dots(BA)}_{k \text{ fois}} = B\left(\underbrace{(AB)(AB)\dots(AB)}_{k-1 \text{ fois}}\right)A = B(B^{-1}A^{-1})A = (BB^{-1})(A^{-1}A) = I_nI_n$$
$$= I_n$$

Donc BA est unipotente.

Exercice 13.

Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant $AB = BA$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^{n-k}A^k$$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction exercice 13.

1. Voir le cours
2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2I_3 + J_3$$
$$(2I_3)J_3 = 2J_3 = J_3(2I_3)$$

On peut appliquer le 1.

$$J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$J_3^3 = J_3^2J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et donc pour tout $k \geq 3$, $J_3^k = O$

$$A^n = (2I_3 + J_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k}J_3^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0}(2I_3)^nJ_3^0 + \binom{n}{1}(2I_3)^{n-}J_3^1 + \binom{n}{2}(2I_3)^{n-2}J_3^2 + O$$
$$= 2^nI_3 + n2^{n-1}J_3 + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}J_3^2$$
$$= 2^n\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 14.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ecrire $A = B + I$, calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n. Vérifier que $A^2 = 5A - 4I$.

En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction exercice 14.

$$B = A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3B$$

$$B^3 = B^2B = 3BB = 3B^2 = 3^2B$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $B^n = 3^{n-1}B$, c'est vrai pour $n = 1$ (et 2)

$$B^{n+1} = B^nB = 3^{n-1}BB = 3^{n-1}B^2 = 3^nB$$

Ce qui achève la récurrence.

I et B commutent (car $IB = BI$) donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$A^n = (B+I)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^kI^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k = \binom{n}{0}B^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B^k = I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}B$$

$$= I + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}\right)B = I + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1} - \binom{n}{0}3^{-1}\right)B$$

$$= I + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}1^{n-k} - \frac{1}{3}\right)B = I + \left(\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{k}1^{n-k} - \frac{1}{3}\right)B$$

$$= I + \left(\frac{1}{3}(3+1)^n - \frac{1}{3}\right)B = I + \frac{1}{3}(4^n - 1)B$$

Il a fallu un peu « bricoler » la somme $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}$ pour retomber sur la formule du binôme.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Et

$$5A - 4I = 5\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

On a bien $A^2 = 5A - 4I$, ce qui équivaut à $-A^2 + 5A = 4I$ et encore à

$$\frac{1}{4}(-A^2 + 5A) = I \Leftrightarrow A\frac{-A + 5I}{4} = I$$

Cela montre que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{-A + 5I}{4}$$

Exercice 15.

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^{250}. On pourra calculer pour tout $k \geq 2$, B^k où $B = A - I$

Correction exercice 15.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall k \geq 2, B^k = O$$

Comme B et I commutent, on peut appliquer la formule du binôme

$$A^{250}=(B+I)^{250}=\sum_{k=0}^{250}\binom{250}{k}B^kI^{250-k}=\sum_{k=0}^{250}\binom{250}{k}B^k=\binom{250}{0}B^0+\binom{250}{1}B^1+O=I+250B$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+250\begin{pmatrix}4&-4\\4&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1001&-1000\\1000&-999\end{pmatrix}$$

Exercice 16.

Soit m un réel non nul ; on pose :

$$A=\begin{pmatrix}0&m&m^2\\ \frac{1}{m}&0&m\\ \frac{1}{m^2}&\frac{1}{m}&0\end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A+I)(A-2I)$.
2. Soit deux matrices B et C telles que $BC=O$ et $C\neq O$, peut-on en déduire que $B=O$.
3. Soit $B=\frac{1}{3}(A+I)$ et $C=\frac{1}{3}(A-2I)$. Calculer B^2 et C^2. En déduire une expression simple de B^n et C^n, $n\in\mathbb{N}^*$.
4. En déduire que pour tout $n\geq 1$:

$$A^n=2^nB+(-1)^{n+1}C$$

Correction exercice 16.

1.

$$(A+I)(A-2I)=\left(\begin{pmatrix}0&m&m^2\\ \frac{1}{m}&0&m\\ \frac{1}{m^2}&\frac{1}{m}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}0&m&m^2\\ \frac{1}{m}&0&m\\ \frac{1}{m^2}&\frac{1}{m}&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}1&m&m^2\\ \frac{1}{m}&1&m\\ \frac{1}{m^2}&\frac{1}{m}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&m&m^2\\ \frac{1}{m}&-2&m\\ \frac{1}{m^2}&\frac{1}{m}&-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2+1+1&\frac{-2+1+1}{m}&m^2(-2+1+1)\\ \frac{-2+1+1}{m}&-2+1+1&(-2+1+1)m\\ \frac{-2+1+1}{m^2}&(-2+1+1)m&-2+1+1\end{pmatrix}=O$$

2. Non bien sûr il suffit de regarder la question 1., $(A+I)(A-2I)=O$ et $A-2I\neq O$, pourtant $A+I\neq O$.
3.

$$B^2=\frac{1}{9}(A+I)^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & 1 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & 1 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1+1+1 & m+m+m & m^2(1+1+1)\\ m+m+m & 1+1+1 & \frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\\ \frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2} & \frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m} & 1+1+1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & 3m & 3m^2\\ 3m & 3 & \frac{3}{m}\\ \frac{3}{m^2} & \frac{3}{m} & 3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & 1 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1\end{pmatrix}=B$$

$$C^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & -2 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & -2 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4+1+1 & -2m-2m+m & -2m^2+m^2-2m^2\\ \frac{-2}{m}+\frac{-2}{m}+\frac{1}{m} & 1+4+1 & -2m-2m+m\\ \frac{-2}{m^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{-2}{m^2} & \frac{1}{m}+\frac{-2}{m}+\frac{-2}{m} & 1+1+4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}6 & -3m & -3m^2\\ \frac{-3}{m} & 6 & -3m\\ \frac{-3}{m^2} & \frac{-3}{m} & 6\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & m & m^2\\ \frac{1}{m} & -2 & m\\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & -2\end{pmatrix}=-C$$

Par des récurrences élémentaires pour tout $n\geq 1$

$$B^n=B \quad \text{et} \quad C^n=(-1)^{n+1}C$$

On fera quand même attention au fait que $n\geq 1$ et au $(-1)^{n+1}$ devant C.

4. Première méthode

On remarque que $A=2B+C$, que $BC=\frac{1}{9}(A+I)(A-2I)=O$ et que

$$CB=\frac{1}{9}(A+I)(A-2I)=\frac{1}{9}(A-2I)(A+I)=0$$

Car $AI=IA$. Ce qui montre que B et C commutent, autrement dit $BC=CB$, on peut alors appliquer la formule du binôme de Newton.

$$A^n=(2B+C)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2B)^kC^{n-k}=\binom{n}{0}(2B)^0C^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(2B)^kC^{n-k}+\binom{n}{n}(2B)^nC^0$$

$$=IC^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}2^kB^kC^{n-k}+(2B)^nI$$

Puis pour $k\in[\![1,n-1]\!]$, $B^kC^{n-k}=BCB^{k-1}C^{n-k-1}=OB^{k-1}C^{n-k-1}=O$, car $BC=CB$.

Donc

$$A^n=C^n+2^nB^n=2^nB+(-1)^{n+1}C$$

Deuxième méthode, par récurrence

Pour $n = 1$, on vérifie bien que $A = 2B + C$ et montrons que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n + 1$.

$$A^{n+1} = A^n A = (2^n B + (-1)^{n+1} C)(2B + C) = 2^{n+1} B^2 + 2^n BC + 2(-1)^{n+1} CB + (-1)^{n+1} C^2$$

Comme on l'a vu dans la première méthode $BC = CB = O$

$$A^{n+1} = A^n A = 2^{n+1} B^2 + (-1)^{n+1} C^2 = 2^{n+1} B - (-1)^{n+1} C = 2^{n+1} B + (-1)^{n+2} C$$

Ce qui achève la récurrence.

Exercice 17.

Soit $n \geq 1$, un entier, et soient A et B deux matrices carrées (n, n). On suppose que la somme de chaque ligne de A et la somme de chaque ligne de B vaut 1. Montrer qu'il en ait de même pour le produit AB.

Correction exercice 17.

On pose $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

On a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1$$

Comme

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{i,k} \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^{n} (a_{i,k} \times 1) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1$$

Exercice 18.

Montrer que la matrices carrée A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Est inversible en calculant explicitement son inverse.

Correction exercice 18.

Soient X et Y deux vecteurs colonnes tels que $AX = Y$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} 2x_3 + x_4 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ -x_1 + 3x_3 + x_4 = y_3 \\ -x_2 - 2x_3 - x_4 = y_4 \end{cases}$$

Impossible d'appliquer la méthode du pivot de Gauss, puisque le coefficient devant x_1 dans la première équation est nul.

$$AX=Y \Leftrightarrow \begin{matrix} L_3 \\ L_2 \\ L_4 \\ L_1 \end{matrix} \begin{cases} -x_1+3x_3+x_4=y_3 \\ x_2-x_3=y_2 \\ -x_2-2x_3-x_4=y_4 \\ 2x_3+x_4=y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3+L_2 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} -x_1+3x_3+x_4=y_3 \\ x_2-x_3=y_2 \\ -3x_3-x_4=y_2+y_4 \\ 2x_3+x_4=y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ 3L_4+2L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1=-y_3+3x_3+x_4 \\ x_2=y_2+x_3 \\ 3x_3=-y_2-y_4-x_4 \\ x_4=3y_1+2y_2+2y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} x_1=-y_3+3x_3+x_4 \\ x_2=y_2+x_3 \\ x_3=\dfrac{1}{3}\left(-y_2-y_4-(3y_1+2y_2+2y_4)\right) \\ x_4=3y_1+2y_2+2y_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-y_3+3x_3+x_4 \\ x_2=y_2+x_3 \\ x_3=\dfrac{1}{3}(-3y_1-3y_2-3y_4) \\ x_4=3y_1+2y_2+2y_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-y_3+3(-y_1-y_2-y_4)+(3y_1+2y_2+2y_4) \\ x_2=y_2-y_1-y_2-y_4 \\ x_3=-y_1-y_2-y_4 \\ x_4=3y_1+2y_2+2y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-y_2-y_3-y_4 \\ x_2=-y_1-y_4 \\ x_3=-y_1-y_2-y_4 \\ x_4=3y_1+2y_2+2y_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 19.

Soit A une matrice réelle à n lignes et p colonnes et f l'application qui à un vecteurs colonnes X à p lignes associe le vecteur colonne à n lignes $f(X)=AX$.

1. On suppose qu'il existe une matrice B telle que $BA=I_p$, montrer que f est injective.
2. On suppose qu'il existe une matrice B telle que $AB=I_n$, montrer que f est surjective.

Correction exercice 19.

1. Pour tout X_1, X_2 deux vecteurs colonnes à n lignes
$$f(X_1)=f(X_2) \Rightarrow AX_1=AX_2 \Rightarrow BAX_1=BAX_2 \Rightarrow X_1=X_2$$
Donc f est injective.
2. Pour tout vecteur Y colonne à p lignes, il existe un vecteur colonne à n lignes $X=BY$ tel que :
$$f(X)=AX=ABY=Y$$
Donc f est surjective.