Feuille 1 Analyse
Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 1.

1. Montrer que
$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$
2. Résoudre
$$\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

Exercice 2.

1. Montrer que $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$$\sin(2t) = \frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)}$$
3. En déduire que
$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$
2. Montrer que :
$$0 < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$$
3. Résoudre
$$\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$
On rappelle que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Montrer que f est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Pour les valeurs où cela ne pose pas de problème calculer $f'(x)$, en déduire les variation de f.
4. Calculer
$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$
Que peut-on en déduire sur le graphe de f en $x = -1$ et $x = 1$?
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ? (Soyez précis sur les justifications).
2. Calculer la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème, sur quel ensemble est-elle dérivable ?

3. Déterminer le signe de f sur son ensemble de définition.

Exercice 6.

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f en tout point où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation et dresser sommairement le graphe de f.
5. Donner une expression plus simple de f pour $x < 0$, puis pour $x > 0$.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos(1-2x^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et préciser l'ensemble où f est continue.
2. Calculer la dérivée de f et préciser l'ensemble où f est dérivable.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arcsin(1-2\cos^4(x))$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 2π périodique, quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle d'étude I.
3. Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f. On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
4. Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ?
   Préciser la valeur des limites de $f'(x)$ à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π.
5. Dresser le tableau de variation de f
6. Tracer son graphe sur trois périodes

Exercice 9.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la parité de f et en déduire un intervalle d'étude.
3. Calculer f' la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème.
4. Montrer que f n'est pas dérivable en $x = 1$. Que peut-on en déduire sur le graphe de f au point d'abscisse $x = 1$?
5. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^+$, avec les limites et les valeurs de f aux points remarquables.
6. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \arcsin(\sin(2t))$

Etudier la parité et la périodicité de g, sur quel intervalle peut-on l'étudier, puis montrer que $g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = g(t)$, en déduire un axe de symétrie. Finalement étudier g sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et tracer le graphe de g sur $\mathbb{R}$ (au moins sur trois périodes). On donnera l'expression de g sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$