Feuille 1 Analyse
Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 1.

1. Montrer que

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$

2. Résoudre

$$\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

Correction exercice 1.

1. $1 > \frac{3}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, comme arccos est décroissante,

$$\arccos(1) < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ce qui équivaut à

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$

2. D'après la première question

$$0 < 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \in [0,\pi]$$

Et bien sûr

$$\arccos(x) \in [0,\pi]$$

On en déduit que

$$\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow x = \cos\left(2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2\cos^2\left(\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) - 1 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{8} - 1$$
$$= \frac{1}{8}$$

Exercice 2.

1. Montrer que $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\sin(2t) = \frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)}$$

3. En déduire que

$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Correction exercice 2.

1. $0 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \arctan(0) < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \arctan(1)$

   Car arctan est strictement croissante, donc

$$0 < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$$

Ce qui entraine que $0 < 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)} = \frac{2\sin(t)}{\cos(t)} \times \cos^2(t) = 2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$$

3.

$$\sin\left(2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1+\tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{5}$$

Comme $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ et $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ sont dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

2. Montrer que :

$$0 < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$$

3. Résoudre

$$\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$

On rappelle que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Correction exercice 3.

1.

$$\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)\sqrt{1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)\sqrt{\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}} = \frac{\sin(x)\,|\cos(x)|}{\cos(x)} = \sin(x)$$

Car $\cos(x) > 0$ pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Comme $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on peut appliquer la formule précédente, en particulier $x \neq 0$ donc on peut diviser par $\tan(x)$

$$\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\tan(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

2.

$$0 < \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow 0 = \arctan(0) < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Car arctan est strictement croissante.

$$0 < \frac{5}{12} < 1 \Rightarrow 0 = \arctan(0) < \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Car arctan est strictement croissante.

En additionnant ces deux inégalités on trouve que

$$0 < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$$

3.

Comme $\arcsin(x)$ et $\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\arctan\left(\frac{5}{12}\right)$ sont dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\arcsin(x)=\arctan\left(\frac{3}{5}\right)+\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\Leftrightarrow x=\sin\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right)$$
$$=\sin\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right)\cos\left(\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right)+\cos\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right)\sin\left(\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right)$$
$$=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}\times\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}\times\frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}}$$
$$=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{16+9}{4^2}}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{144+25}{12^2}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{16+9}{4^2}}}\times\frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{\frac{144+25}{12^2}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\times\frac{1}{\frac{13}{12}}+\frac{1}{\frac{5}{4}}\times\frac{\frac{5}{12}}{\frac{13}{12}}$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{36+20}{65}=\frac{56}{65}$$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Montrer que f est définie et continue sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Pour les valeurs où cela ne pose pas de problème calculer $f'(x)$, en déduire les variation de f.
4. Calculer
$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$
Que peut-on en déduire sur le graphe de f en $x=-1$ et $x=1$?
5. Tracer le graphe de f.

Correction exercice 4.

1. f est définie et continue si et seulement si $-1\le\frac{1}{x}\le 1$

Or
$$-1\le\frac{1}{x}\le 1\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}\le 1\Leftrightarrow x^2\ge 1\Leftrightarrow x\in\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$$

2.
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)=\arcsin(0)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)=\arcsin(0)=0$$
$$\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x}=-1\Rightarrow\lim_{x\to-1^-}\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$$

3.
$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{-1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}=\frac{-1}{\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{|x|}}=\frac{-|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}<0$$

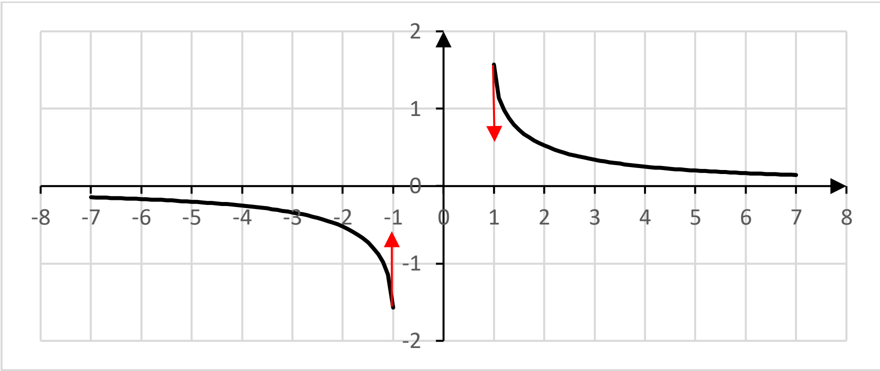
f est décroissante sur $]-\infty,-1]$ et f est décroissante sur $[1,+\infty[$.

4.
$$\lim_{x\to-1^-}f'(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{-|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{-|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\infty$$

Le graphe de f admet des demi-tangente verticales en $x=-1$ et en $x=1$.

5.



Exercice 5.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ? (Soyez précis sur les justifications).
2. Calculer la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème, sur quel ensemble est-elle dérivable ?
3. Déterminer le signe de f sur son ensemble de définition.

Correction exercice 5.

1. $\arcsin$ est définie et continue sur $[-1,1]$, $x \to \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et continue sur $]-1,1[$ donc f est définie et continue sur $]-1,1[$.
2.

$$f(x) = \arcsin(x) - x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = -x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

f est dérivable sur $]-1,1[$.

3. $\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur $]-1,1[$. Comme $f(0) = \arcsin(0) - \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$

Si $x < 0$ alors $f(x) > f(0) = 0$ et si $x > 0$ alors $f(x) < f(0) = 0$.

Exercice 6.

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f en tout point où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation et dresser sommairement le graphe de f.
5. Donner une expression plus simple de f pour $x < 0$, puis pour $x > 0$.

Correction exercice 6.

1.

$$1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2=\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1+2x^2+x^4-(1-2x^2+x^4)}{(1+x^2)^2}=\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}\geq 0$$

Donc

$$\forall x\in\mathbb{R}, -1\leq\frac{1-x^2}{1+x^2}\leq 1$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. On pose $u(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$u'(x)=\frac{(-2x)(1+x^2)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\sqrt{1-\big(u(x)\big)^2}=\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}=\frac{2|x|}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-\big(u(x)\big)^2}}=\frac{4x}{(1+x^2)^2}\times\frac{1+x^2}{2|x|}=\frac{2x}{|x|(1+x^2)}$$

f est dérivable pour tout $x\neq 0$.

En 0^-. $x<0$ donc $|x|=-x$ et

$$f'(x)=\frac{-2}{1+x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=-2$$

En 0^+, $x>0$ donc $|x|=x$ et

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=2$$

f n'est pas dérivable en 0.

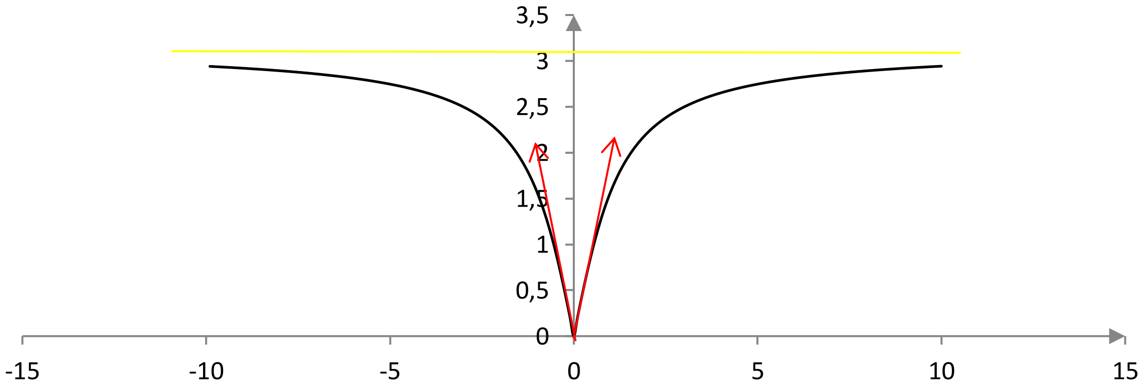
3.

$$\lim_{x\to-\infty} u(x)=-1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty} f(x)=\arccos(-1)=\pi$$

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)=-1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} f(x)=\arccos(-1)=\pi$$

4.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-2 \mid\mid 2$	$+$	
$f(x)$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π



5. Si $x < 0$

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = f(x) = -2\arctan(x) + K_1$$

On prend $x = -1$

$$\arccos(0) = -2\arctan(-1) + K_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = K_1 \Rightarrow K_1 = 0$$

Et

$$f(x) = -2\arctan(x)$$

Si $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = f(x) = 2\arctan(x) + K_2$$

On prend $x = 1$

$$\arccos(0) = 2\arctan(1) + K_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = K_2 \Rightarrow K_2 = 0$$

Et

$$f(x) = 2\arctan(x)$$

Exercice 7.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et préciser l'ensemble où f est continue.
2. Calculer la dérivée de f et préciser l'ensemble où f est dérivable.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f.

Correction exercice 7.

1. On pose $X = 1 - 2x^2$

$$1 - X^2 = 1 - (1-2x^2)^2 = 1 - (1 - 4x^2 + 4x^4) = 4x^2 - 4x^4 = 4x^2(1-x^2)$$

f est définie et continue si et seulement si

$$-1 \le 1 - 2x^2 \le 1 \Leftrightarrow (1-2x^2)^2 \le 1 \Leftrightarrow 1 - X^2 \ge 0 \Leftrightarrow 4x^2(1-x^2) \ge 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \ge 0$$

Bref f est définie et continue sur $D_f = [-1,1]$

2. Si $f(x) = \arccos\big(u(x)\big)$ alors $f'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$

$u'(x) = -4x$ et $1 - \big(u(x)\big)^2 = 1 - X^2 = 4x^2(1-x^2)$ donc

$$f'(x) = -\frac{-4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}} = \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

Si $|x|\sqrt{1-x^2} \neq 0$, c'est-à-dire si $x \in]-1,0[\cup]0,1[$, f est dérivable.

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

f n'est pas dérivable en ± 1.

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to -1} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} = -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 2$$

f n'est pas dérivable en 0.

3. Si $x \in]-1,0[$ alors $|x| = -x$ donc $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} < 0$

Si $x \in]0,1[$ alors $|x| = x$ donc $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} > 0$

$$f(-1) = \arccos(1 - 2(-1)^2) = \arccos(-1) = \pi$$
$$f(1) = \arccos(1 - 2 \times 1^2) = \arccos(-1) = \pi$$
$$f(0) = \arccos(1 - 2 \times 0^2) = \arccos(1) = 0$$
$$\lim_{x \to -1+} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} = -\infty$$

Il y a donc une demi-tangente verticale en -1.

$$\lim_{x \to 1-} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = +\infty$$

Il y a donc une demi-tangente verticale en 1.

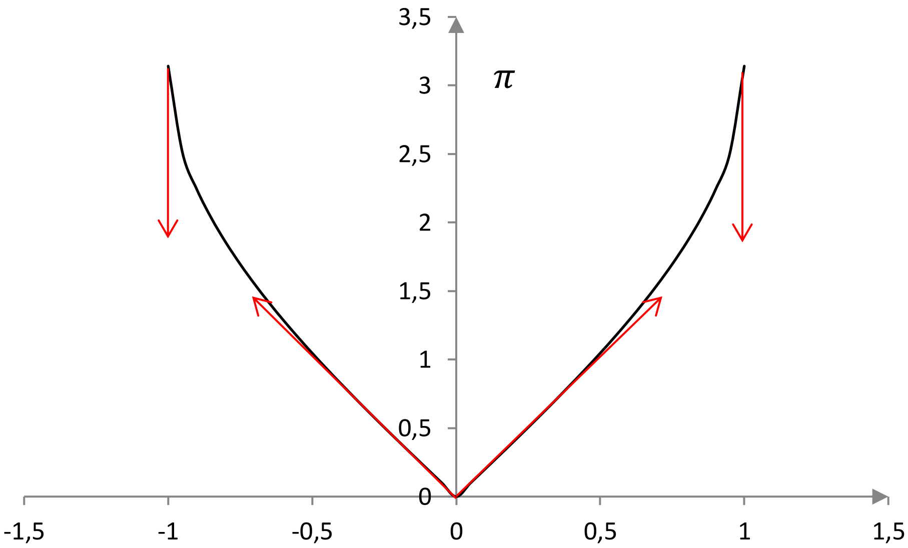
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} = -2$$

Il y a donc une demi-tangente oblique en 0^-.

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = 2$$

Il y a donc une demi-tangente oblique en 0^+.

x	-1		0		1
$f'(x)$	$\|\|$ $-\infty$		-2 $\|\|$ 2		$+\infty$ $\|\|$
$f(x)$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π



4. Sur $]-1,0[$, $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $f(x) = 2\arccos(x) + K_1$

A priori on ne peut pas prendre la valeur -1, ni la valeur 0 car cette relation n'est valable que sur $]-1,0[$.

On peut prendre la valeur $x = -\frac{1}{2}$. On peut faire autrement, comme f est continue en 0 (ou en -1), on écrit :

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

Or pour $x > -1$ $f(x) = 2\arccos(x) + K_1$ donc

$$\arccos(1 - 2 \times 1^2) = \lim_{x \to -1^+} (2\arccos(x) + K_1) \Leftrightarrow \arccos(-1) = 2\arccos(-1) + K_1$$
$$\Leftrightarrow K_1 = -\arccos(-1) = -\pi$$

La continuité en 0 permet de conclure que :

$$\forall x \in [-1,0], \quad f(x) = 2\arccos(x) - \pi$$

Remarque : on aurait pu utiliser que $\int -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -2\arcsin(x) + K$ et on trouve alors $K = 0$.

Sur $]0,1[$, $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $f(x)=2\arcsin(x)+K_2$

Pour changer de méthode, on prend $x=\frac{1}{2}\in[0,1]$. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+K_2$, donc

$$K_2=\arccos\left(1-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)-2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=0$$

La continuité de f en 0 et 1 permet d'affirmer que :

$$\forall x\in[0,1],\quad f(x)=2\arcsin(x)$$

Exercice 8.

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\arcsin(1-2\cos^4(x))$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 2π périodique, quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle d'étude I.
3. Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f. On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
4. Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ?
   Préciser la valeur des limites de $f'(x)$ à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π.
5. Dresser le tableau de variation de f
6. Tracer son graphe sur trois périodes

Correction exercice 8.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$0\le\cos^4(x)\le 1\Leftrightarrow -2\le -2\cos^4(x)\le 0\Leftrightarrow -1\le 1-2\cos^4(x)\le 1$$
   Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$.
2.
$$f(x)=\arcsin(1-2\cos^4(x+2\pi))=\arcsin(1-2\cos^4(x))=f(x)$$
   Donc f est 2π périodique.
   Remarque : en fait f est même π-périodique.
$$f(-x)=\arcsin(1-2\cos^4(-x))=\arcsin(1-2\cos^4(x))=f(x)$$
   Donc f est paire.
   Par conséquent on étudiera f sur $I=[0,\pi]$.
3. On pose $u(x)=1-2\cos^4(x)$
$$f'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-\left(u(x)\right)^2}}$$
$$u'(x)=8\cos^3(x)\sin(x)$$
$$\begin{aligned}1-\left(u(x)\right)^2&=1-(1-2\cos^4(x))^2=1-(1-4\cos^4(x)+4\cos^8(x))\\&=4\cos^4(x)-4\cos^8(x)=4\cos^4(x)\,(1-\cos^4(x))\\&=4\cos^4(x)\,(1-\cos^2(x))(1+\cos^2(x))=4\cos^4(x)\sin^2(x)\,(1+\cos^2(x))\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{8\cos^3(x)\sin(x)}{\sqrt{4\cos^4(x)\sin^2(x)\,(1+\cos^2(x))}}=\frac{8\cos^3(x)\sin(x)}{2\cos^2(x)\,|\sin(x)|\sqrt{1+\cos^2(x)}}\\&=\frac{8\cos(x)\sin(x)}{2|\sin(x)|\sqrt{1+\cos^2(x)}}\end{aligned}$$
   Il y aura évidemment un problème en 0^+ et en π^-. Et sur $]0,\pi[$, $\sin(x)>0$ donc $|\sin(x)|=\sin(x)$
   Finalement pour tout $x\in]0,\pi[$

$$f'(x)=\frac{4\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$$

4.

$$f'(x)=\frac{4\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\xrightarrow[x\to 0^+]{}\frac{4}{\sqrt{1+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$
$$f'(x)=\frac{4\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\xrightarrow[x\to \pi^-]{}\frac{-4}{\sqrt{1+1^2}}=-\frac{4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$$

Pour toutes les autres valeurs de I, f est dérivable, par conséquent f est dérivable sur $]0,\pi[$.

5. Sur $]0,\pi[$, $\sin(x)>0$ et pour tout $x\in I$, $\sin(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\pi$

D'après l'expression

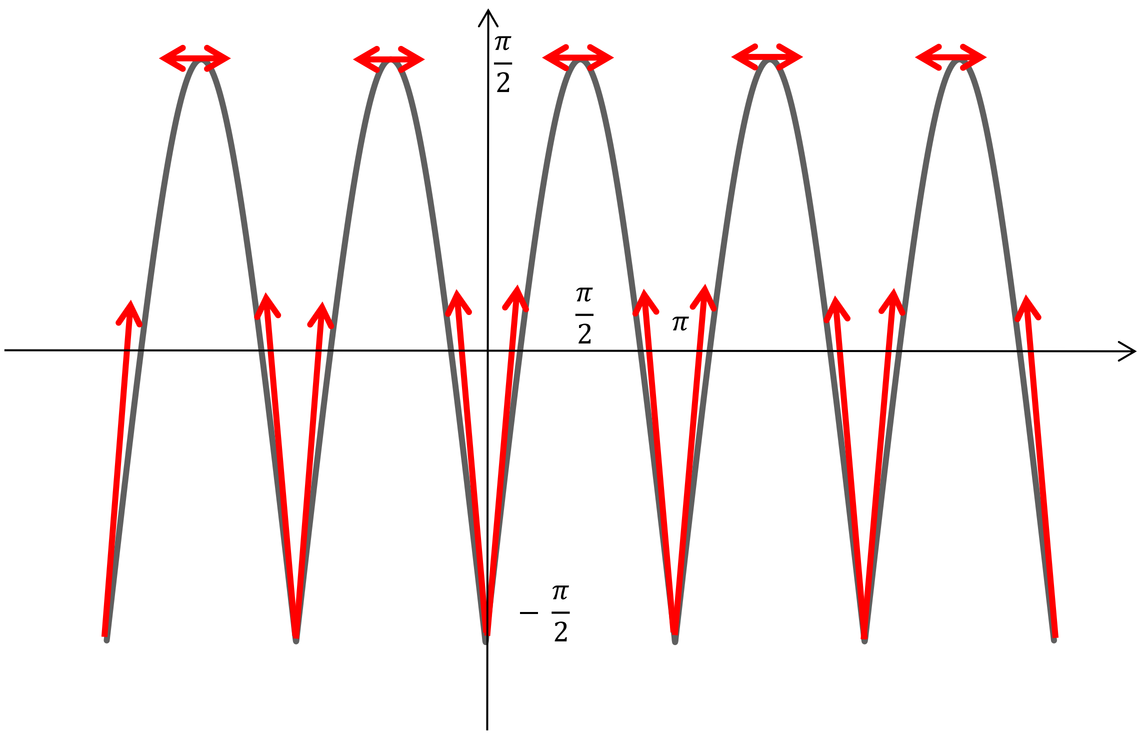
$$f'(x)=\frac{4\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$$

$f'(x)$ a le même signe que $\cos(x)$, c'est-à-dire strictement positif sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et strictement négatif sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

$$f(0)=\arcsin(1-2\cos^4(0))=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\arcsin\left(1-2\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$$
$$f(\pi)=\arcsin(1-2\cos^4(\pi))=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

6.



Exercice 9.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Etudier la parité de f et en déduire un intervalle d'étude.
3. Calculer f' la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème.
4. Montrer que f n'est pas dérivable en $x = 1$. Que peut-on en déduire sur le graphe de f au point d'abscisse $x = 1$?
5. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^+$, avec les limites et les valeurs de f aux points remarquables.
6. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Correction exercice 9.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 = 1 - \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 \geq 0$$

Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 \leq 1$$

Ce qui montre que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{(-x)^2+1}\right) = -\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

f est impaire, on l'étudiera sur $\mathbb{R}^+$.

3. On pose $u(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, alors $u'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2} = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-\big(u(x)\big)^2}} = \frac{2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}} = \frac{2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|} = \frac{2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{\frac{|x^2-1|}{x^2+1}} = 2\frac{1-x^2}{|x^2-1|} \times \frac{1}{x^2+1}$$

4. Pour $x \in [0,1[$, $x^2 - 1 < 0$, donc $|x^2-1| = -(x^2-1) = 1 - x^2$ et alors

$$f'(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

Pour $x \in]1, +\infty[$, $x^2 - 1 > 0$, donc $|x^2-1| = x^2 - 1$ et alors

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1$$

Ce qui montre que f n'est pas dérivable en $x = 1$.

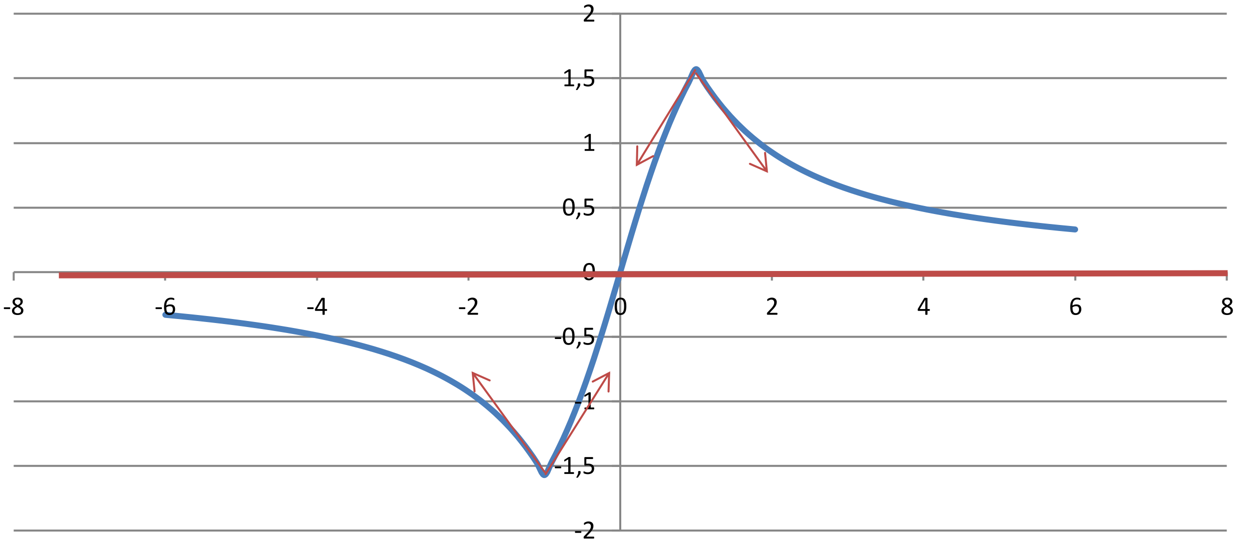
Le graphe de f admet des demi-tangentes obliques en ce point.

5.

$$f(0) = \arcsin(0) = 0; \quad f(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin(0) = 0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

6.



Exercice 10.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \arcsin(\sin(2t))$

Etudier la parité et la périodicité de g, sur quel intervalle peut-on l'étudier, puis montrer que $g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = g(t)$, en déduire un axe de symétrie. Finalement étudier g sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et tracer le graphe de g sur $\mathbb{R}$ (au moins sur trois périodes). On donnera l'expression de g sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

Correction exercice 10.

$$g(-t) = \arcsin(\sin(-2t)) = -g(t)$$

Donc g est impaire.

$$g(t+\pi) = \arcsin(\sin\big(2(t+\pi)\big) = \arcsin(\sin(2t+2\pi)) = g(t)$$

Donc g est π périodique.

On peut donc étudier g sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \arcsin\left(\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)\right) = \arcsin(\sin(\pi - 2t)) = \arcsin(-\sin(-2t))$$
$$= -\arcsin(\sin(-2t)) = -\arcsin(-\sin(2t)) = g(t)$$

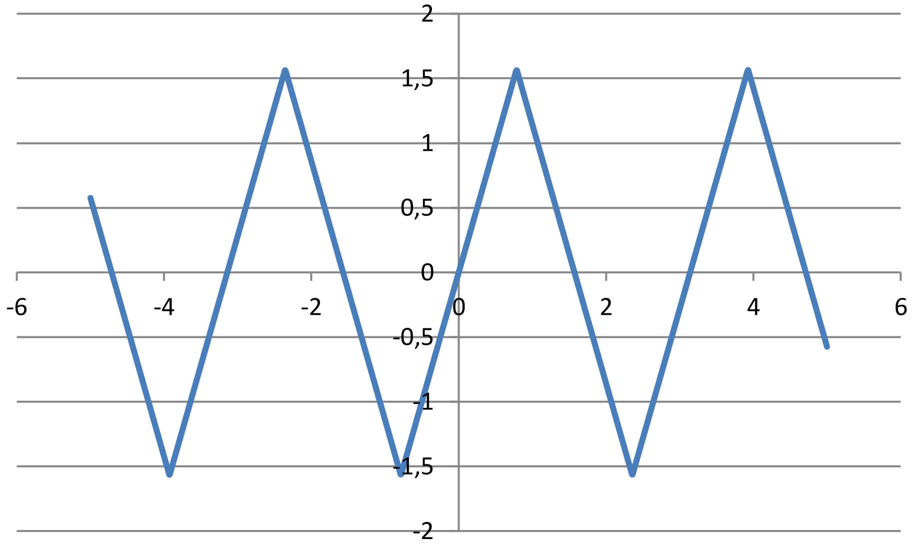
Donc la droite d'équation $t = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie et on peut étudier g sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$0 \le t \le \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \le 2t \le \frac{\pi}{2}$$

Ce qui entraine que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $g(t) = 2t$

Pour $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(t) = g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \pi - 2t$, car $\frac{\pi}{2} - t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Graphe de g


2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-6
-4
-2
0
2
4
6