Feuille 2 Analyse
Développements limités-Calculs de limites

Exercice 1. Etablir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n.

$$a)\ f(x)=e^x\quad n=5 \qquad b)\ f(x)=\ln(1+x^2)\quad n=6 \qquad c)\ f(x)=\sin(2x)+\cos(x^2)\quad n=7$$

$$d)\ f(x)=e^{3x}\sin(2x)\quad n=4 \qquad e)\ f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}\quad n=3 \qquad f)\ f(x)=\tan(x)\quad n=5$$

$$g)\ f(x)=\frac{\ln(1+x)}{e^x\sin(x)}\quad n=3 \qquad h)\ f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\quad n=3 \qquad i)\ f(x)=\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\quad n=3$$

$$j)\ f(x)=\sqrt{1+x}\quad n=4 \qquad k)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\quad n=3$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. La fonction est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 3. Pour a réel fixé on définit la fonction f_a par $f_a(x)=\arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$

1. Soit n un entier. Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre $2n-1$ de la fonction dérivée f_a'.
2. En déduire un développement limité à l'ordre $2n$ de f_a.
3. Soit k un entier. En utilisant le théorème de Taylor-Young, déduire de la question précédente la valeur de $f_a^{(k)}(0)$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes (sans présupposer leur existence!).

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sin(x)} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x-\frac{3}{2}\sin(2x)} \qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)+\ln(\cos(x))}{x^4}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{2\tan(x)-\sin(2x)}{x(1-\cos(3x))} \qquad e)\ \lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} \qquad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$$

$$g)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}\right) \qquad h)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \qquad i)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$

Exercice 5. Calculer un développement limité de la fonction f pour chacun des cas suivants :

a) $f(x)=x^2\ln(x)$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5.
b) $f(x)=\sqrt{x+2}$ où x tend vers 0 et à l'ordre 3.
c) $f(x)=\ln(x+2)$ où x tend vers 0 et à l'ordre 2.
d) $f(x)=\sin(x)$ où x tend vers $\frac{\pi}{4}$ et à l'ordre 3.
e) $f(x)=x^3+4x^2+x-1$ à l'ordre 5, d'abord pour x tendant vers 0 puis pour x tendant vers 1.
f) $f(x)=\ln(\sin(x))$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ et à l'ordre 3.

Exercice 6.

1. Donner un équivalent simple de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$
2. Donner un équivalent simple de $\sin(x)$ en 0. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$
3. Donner un équivalent simple de $\sin(x)-x$ en 0. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}$
4. Donner un équivalent simple de $\sin(x)-x$ en 0. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^2}$

5. Donner un équivalent simple de $1-\cos(x)$ en 0. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$
6. Donner un équivalent simple de $1-\cos(x)$ en 0. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$

Exercice 7. On désigne par f et g les applications de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$ respectivement définies pour $-1<x<1$ par : $f(x)=\sin(\ln(1+x))$ et $g(x)=\ln(1+\sin(x))$

Etablir les développements limités en 0 et à l'ordre 4 des fonctions f et g ; en déduire l'existence d'une constante réelle k (que l'on explicitera) telle que :

$$f(x)-g(x)\underset{0}{\sim}kx^4$$

Exercice 8. Pour chacune des fonctions suivantes proposées ci-dessous un équivalent simple

a) $f(x)=x^8+5x^6-6x^3$ quand x tend vers 0
b) $f(x)=x^8+5x^6-6x^3$ quand x tend vers $+\infty$
c) $f(x)=x^8+5x^6-6x^3$ quand x tend vers 2
d) $f(x)=x^8+5x^6-6x^3$ quand x tend vers 1
e) $f(x)=x^7+\sqrt{x}+(\ln(x))^2+e^{2x}+4x^5-x^9+10^{x+1}$ quand $x\to+\infty$

Exercice 9.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par : $f(x)=\arctan(x)$

En calculant le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction dérivée f', en déduire le développement limité de f à l'ordre 5.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction g définie par

$$g(x)=\frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x}$$

Exercice 10. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, de la fonction :$f(x)=\cos(x)$

Exercice 11.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 1 de la fonction : $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{x^2}$

Exercice 12.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de : $f(x)=\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x\ln(1+x)}$

Exercice 13.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction $f(x)=\frac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)\mathrm{sh}(x)}$

Exercice 14.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de :

$$f(x)=\ln(1+\mathrm{sh}(x))$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$g(x)=\frac{\ln(1+\mathrm{sh}(x))}{\sin(x)}$$

3. Montrer que g est prolongeable par continuité en $x=0$.

Exercice 15.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction définie par :

$$h(x)=\frac{\sin(x)\,\mathrm{sh}(x)}{\sin(x^2)}$$

2. En déduire un équivalent de $h(x)-1$ au voisinage de 0.

Exercice 16. Déterminer la limite suivante, sans préjugée qu'elle existe :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(x)}-e^{\mathrm{ch}(x)}}{\cos(x)-\mathrm{ch}(x)}$$