Feuille 2 Analyse
Développements limités-Calculs de limites

Exercice 1.

Etablir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n.

$a)\ f(x)=e^x \quad n=5 \qquad b)\ f(x)=\ln(1+x^2) \quad n=6 \qquad c)\ f(x)=\sin(2x)+\cos(x^2) \quad n=7$

$d)\ f(x)=e^{3x}\sin(2x) \quad n=4 \qquad e)\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \quad n=3 \qquad f)\ f(x)=\tan(x) \quad n=5$

$g)\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{e^x\sin(x)} \quad n=3 \qquad h)\ f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad n=3 \qquad i)\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} \quad n=3$

$j)\ f(x)=\sqrt{1+x} \quad n=4 \qquad k)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \quad n=3$

Correction exercice 1.

a) $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$

b) $f(x)=x^2-\frac{(x^2)^2}{2}+\frac{(x^2)^3}{3}+o(x^6)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+o(x^6)$

c) $f(x)=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\frac{(2x)^7}{7!}+o(x^7)+1-\frac{(x^2)^2}{2!}+o(x^7)=1+2x-\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{15}x^5-\frac{8}{315}x^7+o(x^7)$

d) Première méthode

$$\begin{aligned}f(x)&=\left(1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^4}{4!}+o(x^4)\right)\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^4)\right)\\&=\left(1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+\frac{27}{8}x^4+o(x^4)\right)\left(2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^4)\right)\\&=2x+6x^2+\left(\frac{9}{2}\times 2-\frac{4}{3}\right)x^3+\left(3\times\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{9}{2}\times 2\right)x^4+o(x^4)\\&=2x+6x^2+\frac{23}{3}x^3+5x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

Remarque le terme $\frac{(3x)^4}{4!}$ ne sert à rien puisque le développement limité de $\sin(2x)$ commence par $2x$.

Deuxième méthode

$$\begin{aligned}f(x)&=\left(1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^4)\right)\\&=x\left(1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+o(x^3)\right)\left(2-\frac{4}{3}x^2+o(x^3)\right)\end{aligned}$$

$\left(1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+o(x^3)\right)\left(2-\frac{4}{3}x^2+o(x^3)\right)$ donnera un développement limité à l'ordre 3, puis multiplié par x, on aura bien un développement limité à l'ordre 4

$$\begin{aligned}f(x)&=x\left(2+6x+\left(\frac{9}{2}\times 2-\frac{4}{3}\right)x\text{^}2+\left(3\times\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{9}{2}\times 2\right)x^3+o(x^3)\right)\\&=x\left(2+6x+\frac{23}{3}x^2+5x^3+o(x^3)\right)=2x+6x^2+\frac{23}{3}x^3+5x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

e) Première méthode

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\ln(1+x)\times\frac{1}{1+x}=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\left(1-x+x^2-x^3+o(x^3)\right)$$

$$=x+\left(-1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)=x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3+o(x^3)$$

Deuxième méthode

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\ln(1+x)\times\frac{1}{1+x}=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\left(1-x+x^2+o(x^2)\right)=$$

$$=x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\left(1-x+x^2+o(x^2)\right)$$

$$=x\left(1+\left(-1-\frac{1}{2}\right)x+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^2+o(x^2)\right)=x\left(1-\frac{3}{2}x+\frac{11}{6}x^2+o(x^2)\right)$$

$$=x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3+o(x^3)$$

f) Première méthode

$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ avec $\cos(0)=1\neq 0$ donc il suffit de déterminer les développements limités de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ à l'ordre 5 en 0. la division suivant les puissances croissantes de $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ par $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ à l'ordre 5 donne le polynôme de Taylor du développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{array}{c|c}
x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5) & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5) \\
\cline{2-2}
x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}+o(x^5) & x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15} \\
\cline{1-1}
\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+o(x^5) & \\
\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6}+o(x^5) & \\
\cline{1-1}
\frac{2x^5}{15}+o(x^5) & \\
\frac{2x^5}{15}+o(x^5) & \\
\cline{1-1}
o(x^5) &
\end{array}$$

On trouve $\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$

Deuxième méthode :

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)}=\frac{1}{1+X}=1-X+X^2-X^3+X^4-X^5+o(X^5)$$

Avec

$$X=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$

$$X^2=X\times X=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)=\frac{x^4}{4}+o(x^5)$$

$$X^3=X^2\times X=o(x^5)$$

Donc

$$X^4=X^5=o(X^5)=o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + o(X^5)$$
$$= 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \left(\frac{x^4}{4} + o(x^5)\right) + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$$
$$\tan(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right)$$
$$= x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^5 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

g)

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x \sin(x)} = e^{-x}\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$$

Le problème ici, c'est que les développements limités de $\ln(1+x)$ et de $\sin(x)$ commencent tous les deux par « x » donc le quotient $\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$ va se simplifier par x, il faut faire des développements limités de $\ln(1+x)$ et de $\sin(x)$ à un ordre supérieur de 1 (donc 4 pour obtenir un développement limité à l'ordre 3).

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)}{x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$$

Première méthode : division suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{r|l}
1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) & 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3) \\ \cline{2-2}
1 \qquad - \frac{x^2}{6} \qquad + o(x^3) & 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\ \hline
- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) & \\
- \frac{x}{2} \qquad + \frac{x^3}{12} + o(x^3) & \\ \hline
\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) & \\
\frac{x^2}{2} \qquad + o(x^3) & \\ \hline
- \frac{x^3}{3} + o(x^3) & \\
- \frac{x^3}{3} + o(x^3) & \\ \hline
o(x^3) &
\end{array}$$

Deuxième méthode

$$\frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$$

On va donc chercher le développement limité à l'ordre 3 de $\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}$

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)$$

Avec

$$X = -\frac{x^2}{6} + o(x^3)$$
$$X^2 = \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) = o(x^3)$$
$$X^3 = o(x^3) \quad \text{et} \quad o(X^3) = o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}=1-\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)+o(x^3)-o(x^3)+o(x^3)=1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)$$

Remarque :

Il était inutile de faire un développement limité de $\frac{1}{1+X}$ à l'ordre 3, à l'ordre 1 cela aurait été insuffisant car alors

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}=\frac{1}{1+X}=1-X+o(X)=1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)$$

Et non pas $o(x^3)$, il s'agit donc d'un développement limité à l'ordre 2 et pas 3.

Par contre un développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{1+X}$ suffisait.

$$\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\times\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}$$
$$=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\times\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)$$
$$=1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)x^2+\left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\right)x^3+o(x^3)=1-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$f(x)=e^{-x}\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}=\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)$$
$$=1+\left(-\frac{1}{2}-1\right)x+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)$$
$$=1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}x^3+o(x^3)$$

h) On ne peut pas appliquer la formule $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha=\frac{1}{x}$ car pour appliquer cette formule il faut que α soit une constante.

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

Il faut faire un développement limité de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ à l'ordre 3, mais comme dans l'exercice précédent il va y avoir une simplification par « x » donc on va faire un développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 4.

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{x}=\frac{x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)$$

Donc

$$f(x)=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}$$

On ne peut pas poser $X=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)$ et appliquer la formule de e^X car ce $X\to 1\neq 0$ lorsque $x\to 0$

$$f(x)=e^1e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}=ee^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}=ee^X=e\left(1+X+\frac{X}{2}+\frac{X^3}{6}+o(X^3)\right)$$

Avec

$$X=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)$$

$$X^2 = XX = \left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right) = \frac{x^2}{4}+\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)$$
$$= \frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$
$$X^3 = X^2X = \left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{8}+o(x^3)$$
$$o(X^3) = o(x^3)$$
$$f(x) = e\left(1+X+\frac{X}{2}+\frac{X^3}{6}+o(X^3)\right)$$
$$= e\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right)+o(x^3)\right)$$
$$= e\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{48}\right)x^3+o(x^3)\right) = e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+o(x^3)$$

i)

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \ln(1+x)\,(1+x)^{-2}$$
$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

Et avec la formule $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = -2$

$$(1+x)^{-2} = 1+(-2)x+(-2)(-3)\frac{x^2}{2!}+(-2)(-3)(-4)\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$
$$= 1-2x+3x^2-4x^3+o(x^3)$$
$$f(x) = \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\left(1-2x+3x^2-4x^3+o(x^3)\right)$$
$$= x+\left(-2-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(3+1+\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3) = x-\frac{5}{2}x^2+\frac{13}{3}x^3+o(x^3)$$

j)

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1+\left(\frac{1}{2}\right)x+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^3}{3!}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{x^4}{4!}$$
$$+o(x^4) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+o(x^4)$$

k)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \left(1+(-x)\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(-x)^2}{2!}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{(-x)^3}{3!}+o(x^3)$$
$$= 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$$

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. La fonction est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Correction exercice 2.

1. $f(x)=x^2\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, comme $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$ lorsque $x\to 0$, on peut écrire que $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=o(x)$
Donc $f(x)=o(x^2)$ elle admet un développement limité en 0 dont le polynôme de Taylor est le polynôme nul.
2. f est manifestement continue en 0
$$f'(x)=3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$$
$f'(x)$ admet une limite en 0 et f est continue en 0, donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$
$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=3x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
Cette expression n'admet pas de limite en 0 donc f' n'est pas dérivable en 0, autrement dit f n'est pas deux fois dérivable en 0.
Remarque :
Ce n'est pas parce que f admet un développement à l'ordre 2 en 0 que f est 2 fois dérivable en 0.

Exercice 3.

Pour a réel fixé on définit la fonction f_a par $f_a(x)=\arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$

1. Soit n un entier. Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre $2n-1$ de la fonction dérivée f_a'.
2. En déduire un développement limité à l'ordre $2n$ de f_a.
3. Soit k un entier. En utilisant le théorème de Taylor-Young, déduire de la question précédente la valeur de $f_a^{(k)}(0)$.

Correction exercice 3.

1.
$$f_a(x)=\arctan\big(u(x)\big)$$
Avec $u(x)=\frac{x+a}{1-ax}$
$$f_a'(x)=\frac{u'(x)}{1+\big(u(x)\big)^2}$$
$$u'(x)=\frac{1\times(1-ax)-(x+a)\times(-a)}{(1-ax)^2}=\frac{1+a^2}{(1-ax)^2}$$
$$1+\big(u(x)\big)^2=1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2=\frac{(1-ax)^2+(x+a)^2}{(1-ax)^2}=\frac{1-2ax+a^2x^2+x^2+2ax+a^2}{(1-ax)^2}$$
$$=\frac{1+a^2x^2+x^2+a^2}{(1-ax)^2}=\frac{1+a^2+x^2(a^2+1)}{(1-ax)^2}=\frac{(1+a^2)(1+x^2)}{(1-ax)^2}$$
$$f_a'(x)=\frac{\frac{1+a^2}{(1-ax)^2}}{\frac{(1+a^2)(1+x^2)}{(1-ax)^2}}=\frac{1}{1+x^2}$$
$$f_a'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2(n-1)}+o(x^{2n-1})$$
2.
$$f_a(x)=f_a(0)+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+o(x^{2n})$$
$$=\arctan(a)+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+o(x^{2n})$$
$$=\arctan(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k-1}}{2k-1}+o(x^{2n})$$

3. La fonction f_a est de classe C^∞ donc elle admet un développement limité à n'importe quel ordre

$$f_a(x)=\sum_{l=0}^{2n}\frac{f_a^{(l)}(0)}{l!}x^l+o(x^{2n})=f_a(0)+\sum_{l=1}^{2n}\frac{f_a^{(l)}(0)}{l!}x^l+o(x^{2n})$$

$$=f_a(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f_a^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}x^{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{f_a^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n})$$

On a coupé la somme entre la somme des $l=2k-1$ (les impairs) et des $l=2k$ (les pairs)
Par conséquent

$$f_a^{(0)}(0)=\arctan(a)\ \text{ et }\ \forall k\in[\![1,n]\!]\ f_a^{(2k)}(0)=0$$

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\ \frac{f_a^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}=\frac{(-1)^k}{2k-1}\Rightarrow\forall k\in[\![1,n]\!]f_a^{(2k-1)}(0)=(2k-1)!\frac{(-1)^k}{2k-1}=(-1)^k(2k-2)!$$

Exercice 4.

Calculer les limites suivantes (sans présupposer leur existence!).

$a)\ \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sin(x)}\qquad b)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{3x-\frac{3}{2}\sin(2x)}\qquad c)\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)+\ln(\cos(x))}{x^4}$

$d)\ \lim_{x\to0}\frac{2\tan(x)-\sin(2x)}{x(1-\cos(3x))}\qquad e)\ \lim_{x\to0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}\qquad f)\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$

$g)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}\right)\qquad h)\ \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\qquad i)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

Correction exercice 4.

On vérifiera à chaque fois qu'il s'agit de forme indéterminée. La technique est plus ou moins toujours pareil, on calcul un développement du dénominateur à un ordre tel que le coefficient devant le premier terme du développement limité est non nul, puis on fait un développement limité au même ordre du numérateur (il se peut qu'un ordre inférieur suffise)

a) $\sin(x)=x+o(x)$, donc un développement limité à l'ordre 1 (à l'ordre 0 cela aurait été insuffisant)

$$\operatorname{sh}(x)=x+o(x)$$

Alors

$$\frac{\operatorname{sh}(x)}{\sin(x)}=\frac{x+o(x)}{x+o(x)}=\frac{x\big(1+o(1)\big)}{x\big(1+o(1)\big)}=\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\xrightarrow[x\to0]{}1$$

b) Il faut faire un développement limité à l'ordre 3 de $\sin(2x)$.

$$3x-\frac{3}{2}\sin(2x)=3x-\frac{3}{2}\left(2x-\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3)\right)=3x-3x+2x^3+o(x^3)=2x^3+o(x^3)$$

$$\sin(3x)=3x-\frac{(3x)^3}{6}+o(x^3)=3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)$$

Alors

$$\frac{\sin(3x)}{3x-\frac{3}{2}\sin(2x)}=\frac{3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)}{2x^3+o(x^3)}=\frac{x\left(3-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^3\big(2+o(1)\big)}=\frac{3-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}{x^2\big(2+o(1)\big)}\xrightarrow[x\to0]{}+\infty$$

Ici un développement limité de $\sin(3x)$ à l'ordre 1 aurait suffi.

c) x^4 est un développement limité dont le premier terme non nul est x^4, il suffit de faire un développement limité de $1-\cos(x)+\ln(\cos(x))$ à l'ordre 4

$$1-\cos(x)+\ln(\cos(x))=1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)$$
$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\ln(1+X)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+X-\frac{X^2}{2}+o(X^2)$$

Avec

$$X=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$
$$X^2=XX=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=\frac{x^4}{4}+o(x^4)$$
$$o(X^2)=o(x^4)$$
$$1-\cos(x)+\ln(\cos(x))=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{2}+o(x^4)$$
$$=\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)=-\frac{1}{6}x^4+o(x^4)$$
$$\frac{1-\cos(x)+\ln(\cos(x))}{x^4}=\frac{-\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{x^4\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right)}{x^4}=-\frac{1}{6}+o(1)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{6}$$

Ici, il fallait faire un développement limité de $1-\cos(x)+\ln(\cos(x))$ à l'ordre 4, à un ordre inférieur, on ne pouvait pas conclure.

d)

$$x(1-\cos(3x))=x\left(1-\left(1-\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)\right)\right)=\frac{9}{2}x^3+o(x^3)$$

On fait un développement limité à l'ordre 3 de $2\tan(x)-\sin(2x)$

$$2\tan(x)-\sin(2x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(2x-\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3)\right)=\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)x^3+o(x^3)$$
$$=2x^3+o(x^3)$$
$$\frac{2\tan(x)-\sin(2x)}{x(1-\cos(3x))}=\frac{2x^3+o(x^3)}{\frac{9}{2}x^3+o(x^3)}=\frac{x^3(2+o(1))}{x^3\left(\frac{9}{2}+o(1)\right)}=\frac{2+o(1)}{\frac{9}{2}+o(1)}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{4}{9}$$

e)

$$(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))}=e^{\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}}$$

Il faut trouver la limite de $\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$ en 0.

$$\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}=\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}=\frac{\ln(1+X)}{x^2}=\frac{X+o(X)}{x^2}=\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\frac{x^2\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}{x^2}$$
$$=-\frac{1}{2}+o(1)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{2}$$

Avec $X=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, donc $o(X)=o(x^2)$

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

f) En reprenant le calcul du e) en changeant x en $3x$, puis en $2x$

$$\ln(\cos(3x))=-\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)=-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)$$
$$\ln(\cos(2x))=-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)=-2x^2+o(x^2)$$

$$\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}=\frac{-2x^2+o(x^2)}{-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}=\frac{x^2\big(-2+o(1)\big)}{x^2\left(-\frac{9}{2}+o(1)\right)}=\frac{-2+o(1)}{-\frac{9}{2}+o(1)}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{4}{9}$$

g)

$$\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-(e^x-1)}{x^2(e^x-1)}=\frac{1+x-e^x}{x^2(e^x-1)}$$
$$x^2(e^x-1)=x^2(1+x+o(x)-1)=x^3+o(x^3)$$

On fait donc un développement limité de $1+x-e^x$ à l'ordre 3

$$1+x-e^x=1+x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}=\frac{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\frac{x^2\left(-\frac{1}{2}-\frac{x}{6}+o(x)\right)}{x^3\big(1+o(1)\big)}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{x}{6}+o(x)}{x\big(1+o(1)\big)}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}-\frac{x}{6}+o(x)}{x\big(1+o(1)\big)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}-\frac{x}{6}+o(x)}{x\big(1+o(1)\big)}=-\infty$$

h)

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$

Là on ne sait pas trop à quel ordre faire le développement limité de $\frac{e^x-1}{x}$, et à postériori celui de $\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$, alors il faut se lancer, à l'ordre 0 cela parait un peu juste $e^x=1+o(1)$, cela n'ira pas, à l'ordre 1, $e^x=1+x+o(x)$ entraine que $\frac{e^x-1}{x}=1+o(1)$ (en allant vite), alors c'est mal parti pour un développement limité de $\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$, alors on tente un développement limité de e^x à l'ordre 2.

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1}{x}=\frac{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x}=\frac{x\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right)}{x}=1+\frac{x}{2}+o(x)$$

Donc

$$\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{x}{2}+o(x)\right)=\ln(1+X)=X+o(X)=\frac{x}{2}+o(x)$$

Avec $X=\frac{x}{2}+o(x)$ et en allant un peu plus vite que d'habitude. Alors

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)=\frac{1}{x}x\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=\frac{1}{2}+\frac{o(1)\xrightarrow[x\to 0]{}1}{2}$$

i) Ce n'est pas le même exercice que le précédent car $x\to+\infty$, on pose $t=\frac{1}{x}\to 0^+$ lorsque $x\to+\infty$

Donc $x=\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{\frac{1}{t}}\ln\left(\frac{e^{\frac{1}{t}}-1}{\frac{1}{t}}\right)=t\ln\left(\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)t\right)=t\ln\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)+t\ln(t)$$
$$\lim_{t\to 0}t\ln(t)=0$$

Par croissance comparée.

Mais $t\ln\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)$ est toujours une forme indéterminée lorsque t tend vers 0.

$$t\ln\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)=t\ln\left(e^{\frac{1}{t}}\left(1-e^{-\frac{1}{t}}\right)\right)=t\ln\left(e^{\frac{1}{t}}\right)+t\ln\left(1-e^{-\frac{1}{t}}\right)=1+t\ln\left(1-e^{-\frac{1}{t}}\right)$$

$$e^{-\frac{1}{t}}\xrightarrow[t\to 0^+]{}0$$

Donc

$$t\ln\left(1-e^{-\frac{1}{t}}\right)\xrightarrow[t\to 0^+]{}0$$

Finalement

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{t\to 0^+}\left(t\ln\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)+t\ln(t)\right)=1$$

Exercice 5.

Calculer un développement limité de la fonction f pour chacun des cas suivants :

a) $f(x)=x^2\ln(x)$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5.

b) $f(x)=\sqrt{x+2}$ où x tend vers 0 et à l'ordre 3.

c) $f(x)=\ln(x+2)$ où x tend vers 0 et à l'ordre 2.

d) $f(x)=\sin(x)$ où x tend vers $\frac{\pi}{4}$ et à l'ordre 3.

e) $f(x)=x^3+4x^2+x-1$ à l'ordre 5, d'abord pour x tendant vers 0 puis pour x tendant vers 1.

f) $f(x)=\ln(\sin(x))$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ et à l'ordre 3.

Correction exercice 5.

a) On pose $t=x-1\xrightarrow[x\to 1]{}0$, donc $x=t+1$

$$f(x)=x^2\ln(x)=(t+1)^2\ln(t+1)=(1+2t+t^2)\ln(1+t)$$

Le développement limité de $1+2t+t^2$ à l'ordre 5 est $1+2t+t^2$

Le développement limité de $\ln(1+t)$ à l'ordre 5 est $t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}+o(t^5)$

$$\begin{aligned}
f(x)&=(1+2t+t^2)\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}+o(t^5)\right)\\
&=t+\left(-\frac{1}{2}+2\right)t^2+\left(\frac{1}{3}-1+1\right)t^3+\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-1\right)t^4+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)t^5+o(t^5)\\
&=t+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{12}t^4+\frac{1}{30}t^5+o(t^5)\\
&=x-1+\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{7}{12}(x-1)^4+\frac{1}{30}(x-1)^5+o((x-1)^5)
\end{aligned}$$

Et surtout on ne développe pas, cette formule n'a d'intérêt que pour $x\to 1$.

b) Ne pas faire l'erreur classique suivante $f(x)=\sqrt{1+X}$ avec $X=x+1$ car ce $X\to 1$ lorsque $x\to 0$ donc on ne peut pas appliquer la formule $\sqrt{1+X}=(1+X)^{\frac{1}{2}}$

$$f(x)=\sqrt{x+2}=\sqrt{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}=\sqrt{2}\sqrt{1+X}=\sqrt{2}(1+X)^{\frac{1}{2}}$$

Avec $X=\frac{x}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}0$, donc

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}X+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{X^2}{2!}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{X^3}{3!}+o(X^3)\right)\\
&=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{6}+o(x^3)\right)\\
&=\sqrt{2}\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{32}+\frac{x^3}{128}+o(x^3)\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}\frac{x}{4}-\sqrt{2}\frac{x^2}{32}+\sqrt{2}\frac{x^3}{128}+o(x^3)
\end{aligned}$$

c) Ne pas faire l'erreur classique suivante $f(x) = \ln(1+X)$ avec $X = x+1$ car ce $X \to 1$ lorsque $x \to 0$ donc on ne peut pas appliquer la formule $\ln(1+X)$

$$f(x) = \ln(x+2) = \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \ln(2) + \ln(1+X)$$

Avec $X = \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc

$$f(x) = \ln(2) + X - \frac{X^2}{2} + o(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

d) Première méthode

On pose $t = x - \frac{\pi}{4} \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\to} 0$, donc $x = t + \frac{\pi}{4}$

$$f(x) = \sin(x) = \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \sin(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}t^3 + o(t^3)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

Et on ne développe surtout pas.

Deuxième méthode avec la formule de Taylor

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

e) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 1 = -1 + x + 4x^2 + x^3$, c'est le développement limité de f en 0 à l'ordre 5, ici $o(x^5) = 0$.

Remarque : c'est le développement limité à l'ordre n, pour tout $n \geq 4$. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 serait $f(x) = -1 + x + 4x^2 + o(x^2)$ car $x^3 = x^2 \times x = o(x^2)$

Au voisinage de 1, on utilise la formule de Taylor

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2} + f^{(3)}(1)\frac{(x-1)^3}{3!} + f^{(4)}(1)\frac{(x-1)^4}{4!}$$
$$+ f^{(5)}(1)\frac{(x-1)^5}{5!} + o((x-1)^5)$$

$$f(1) = 5$$
$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 1 \Rightarrow f'(1) = 12$$
$$f''(x) = 6x + 8 \Rightarrow f''(1) = 14$$
$$f^{(3)}(x) = 6 \Rightarrow f^{(3)}(1) = 6$$
$$f^{(4)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(4)}(1) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(5)}(1) = 0$$

$$f(x) = 5 + 12(x-1) + 14\frac{(x-1)^2}{2} + 6\frac{(x-1)^3}{6} + o((x-1)^5)$$

$$= 5 + 12(x-1) + 7(x-1)^2 + (x-1)^3 + o((x-1)^5)$$

f) On pose $t = \frac{\pi}{2} - x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$, donc $x = \frac{\pi}{2} - t$

$$f(x) = \ln(\sin(x)) = \ln\left(sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \ln(cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = \ln(1+X)$$

$$= X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

Avec $X = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$$X^2 = o(x^3) \quad \text{et} \quad o(X^2) = o(x^3)$$

Par conséquent $f(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Exercice 6.

1. Donner un équivalent simple de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$
2. Donner un équivalent simple de $\sin(x)$ en 0. En déduire
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$
3. Donner un équivalent simple de $\sin(x) - x$ en 0. En déduire
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) - x}{x^3}$$
4. Donner un équivalent simple de $\sin(x) - x$ en 0. En déduire
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) - x}{x^2}$$
5. Donner un équivalent simple de $1 - \cos(x)$ en 0. En déduire
$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$
6. Donner un équivalent simple de $1 - \cos(x)$ en 0. En déduire
$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos(x)}{x}$$

Correction exercice 6.

1. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

   Alors $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$
2. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$

   Alors $\frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$
3. $\sin(x) - x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$

   Alors $\frac{\sin(x)-x}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

4. $\sin(x)-x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x=-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\underset{0}{\sim}\ -\frac{x^3}{6}$

   Alors $\frac{\sin(x)-x}{x^2}\underset{0}{\sim}\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2}\ =-\frac{x}{6}$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^2}=0$$

5. $1-\cos(x)=1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1=\frac{x^2}{2}+o(x^2)\underset{0}{\sim}\ \frac{x^2}{2}$

   Alors $\frac{1-\cos(x)}{x^2}\underset{0}{\sim}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}\ =\frac{1}{2}$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

6. $1-\cos(x)=1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1=\frac{x^2}{2}+o(x^2)\underset{0}{\sim}\ \frac{x^2}{2}$

   Alors $\frac{1-\cos(x)}{x}\underset{0}{\sim}\frac{\frac{x^2}{2}}{x}\ =\frac{x}{2}$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=0$$

7. $e^x-1=1+x+o(x)-1\underset{0}{\sim}x$

   Alors $\frac{e^x-1}{x}\underset{0}{\sim}\frac{x}{x}\ =1$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Exercice 7.

On désigne par f et g les applications de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$ respectivement définies pour $-1<x<1$ par :

$$f(x)=\sin(\ln(1+x))\qquad\text{et}\qquad g(x)=\ln(1+\sin(x))$$

Etablir les développements limités en 0 et à l'ordre 4 des fonctions f et g ; en déduire l'existence d'une constante réelle k (que l'on explicitera) telle que :

$$f(x)-g(x)\sim kx^4$$

Quand $x\to 0$.

Correction exercice 7.

$$f(x)=\sin(\ln(1+x))=\sin\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)=\sin(X)=X-\frac{X^3}{6}+o(X^4)$$

Avec $X=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$

$$X^2=XX=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)$$
$$=x^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)x^3+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)x^4+o(x^4)=x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+o(x^4)$$

$$X^3=X^2X=\left(x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+o(x^4)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)=x^3+\left(-\frac{1}{2}-1\right)x^4+o(x^4)$$
$$=x^3-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)$$

$$X^4=x^4+o(x^4)\ \text{ et }\ o(X^4)=o(x^4)$$

Alors

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)\right)+o(x^4)$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)x^3+\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{12}\right)x^4\ +o(x^4)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^3\ +o(x^4)$$
$$g(x)=\ln(1+\sin(x))=\ln\left(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4}+o(X^4)$$
Avec $X=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$
$$X^2=XX=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$
$$X^3=X^2X=x^3+o(x^4)$$
$$X^4=x^4+o(x^4)\qquad \text{et}\qquad o(X^4)=o(x^4)$$
Alors
$$g(x)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4}+o(X^4)$$
$$=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)+\frac{1}{3}\left(x^3+o(x^4)\right)-\frac{1}{4}\left(x^4+o(x^4)\right)+o(x^4)$$
$$=x-\frac{1}{2}x^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)x^3+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)x^4+o(x^4)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$
Par conséquent
$$f(x)-g(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^3\ +o(x^4)-\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\right)=\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$
$$=\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\sim\frac{1}{12}x^4$$

Exercice 8.

Pour chacune des fonctions suivantes proposées ci-dessous un équivalent simple

a) $f(x)=x^8+5x^6-6x^3$ quand x tend vers 0
b) $f(x)=x^8+5x^6-6x^3$ quand x tend vers $+\infty$
c) $f(x)=x^8+5x^6-6x^3$ quand x tend vers 2
d) $f(x)=x^8+5x^6-6x^3$ quand x tend vers 1
e) $f(x)=x^7\ +\sqrt{x}+(\ln(x))^2+e^{2x}+4x^5-x^9+10^{x+1}$ quand $x\to+\infty$

Correction exercice 8.

a) $f(x)\underset{0}{\sim}-6x^3$
b) $f(x)\underset{+\infty}{\sim}x^8$
c) $f(2)=2^8+5\times 2^5-6\times 3^3=256+5\times 32-6\times 8=256+160-48=268$ donc $f(x)\underset{2}{\sim}268$
d) $f(1)=1+5-6=0$ donc $f(1)$ n'est pas équivalent à 0.

D' après la formule de Taylor pour une fonction suffisamment dérivable
$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+o(x-1)$$
$$f'(x)=8x^7+30x^5-18x^2\Rightarrow f'(1)=8+30-18=20$$
Alors
$$f(x)=20(x-1)+o(x-1)\underset{1}{\sim}20(x-1)$$
e) Il faut factoriser par le terme qui tend le plus vite vers l'infini
$$f(x)=x^7\ +\sqrt{x}+(\ln(x))^2+e^{2x}+4x^5-x^9+10^{x+1}$$
$$=x^7\ +\sqrt{x}+(\ln(x))^2+e^{2x}+4x^5-x^9+10e^{x\ln(10)}$$

Ce sont les exponentielles qui l'emportent

Comme $e < 3$ alors $e^2 < 9 < 10$, par conséquent $2 = \ln(e^2) < \ln(10)$

C'est $e^{x\ln(10)}$ le plus « fort »

$$f(x) = e^{x\ln(10)}\left(x^7 e^{-x\ln(10)} + x^{\frac{1}{2}} e^{-x\ln(10)} + (\ln(x))^2 e^{-x\ln(10)} + e^{(2-\ln(10)x} + 4x^5 e^{-x\ln(10)} - x^9 e^{-x\ln(10)} + 10\right)$$

$$\frac{f(x)}{e^{x\ln(10)}} = x^7 e^{-x\ln(10)} + x^{\frac{1}{2}} e^{-x\ln(10)} + (\ln(x))^2 e^{-x\ln(10)} + e^{(2-\ln(10)x} + 4x^5 e^{-x\ln(10)} - x^9 e^{-x\ln(10)} + 10$$

$$x^7 e^{-x\ln(10)} + x^{\frac{1}{2}} e^{-x\ln(10)} + (\ln(x))^2 e^{-x\ln(10)} + 4x^5 e^{-x\ln(10)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Par croissance comparée

Et $e^{(2-\ln(10)x} \to 0$ car $2 - \ln(10) < 0$

Ce qui montre que

$$\frac{f(x)}{e^{x\ln(10)}} \xrightarrow[+\infty]{} 10 \Rightarrow \frac{f(x)}{10e^{x\ln(10)}} \xrightarrow[+\infty]{} 1$$

Autrement dit

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 10e^{x\ln(10)} = 10^{x+1}$$

Exercice 9.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \arctan(x)$$

En calculant le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction dérivée f', en déduire le développement limité de f à l'ordre 5.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$$

Correction exercice 9.

1.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

En intégrant

$$f(x) = f(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Car $f(0) = \arctan(0) = 0$

2.

$$g(x)=\frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x}=\frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)-x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)-x}=\frac{-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)}{-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}$$

$$=\frac{x^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{5}+o(x^2)\right)}{x^3\left(-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{120}+o(x^2)\right)}=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{5}+o(x^2)}{-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{120}+o(x^2)}=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{5}+o(x^2)}{-\frac{1}{6}\left(1-\frac{x^2}{20}+o(x^2)\right)}$$

$$=-6\left(-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{5}+o(x^2)\right)\frac{1}{1-\frac{x^2}{20}+o(x^2)}$$

$$=-6\left(-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{5}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{20}+o(x^2)\right)=-6\left(-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{60}+\frac{1}{5}\right)x^2+o(x^2)\right)$$

$$=2-6\times\frac{11}{60}x^2+o(x^2)=2-\frac{11}{10}x^2+o(x^2)$$

Exercice 10.

Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, de la fonction :

$$f(x)=\cos(x)$$

Correction exercice 10.

Première méthode :

f est $C^{+\infty}$ donc f admet un développement limité à n'importe quel ordre, on peut appliquer la formule de Taylor-Young

$$f(0)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-\sin(x)\Rightarrow f'(0)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x)=-\cos(x)\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$f^{(3)}(x)=\sin(x)\Rightarrow f^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(4)}(x)=\cos(x)\Rightarrow f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\cos(x)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

Deuxième méthode

On pose $t=x-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=t+\frac{\pi}{3}$

$$f(x)=\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+o(t^4)\right)\times\frac{1}{2}-\left(t-\frac{t^3}{3!}+o(t^4)\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{4}t^2+\frac{\sqrt{3}}{12}t^3+\frac{1}{48}t^4+o(t^4)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

Exercice 11.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 1 de la fonction

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{x^2}$$

Correction exercice 11.

On pose $t=x-1$, $x=1+t$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2+t}}{(1+t)^2}=\sqrt{2}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-2}$$

$$=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2}+o(t^2)\right)\left(1-2t-2(-3)\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{32}+o(t^2)\right)\left(1-2t+3t^2+o(t^2)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(1+\left(-2+\frac{1}{4}\right)t+\left(3-\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)t^2+o(t^2)\right)=\sqrt{2}\left(1-\frac{7}{4}t+\frac{79}{32}t^2+o(t^2)\right)$$

$$=\sqrt{2}-\frac{7\sqrt{2}}{4}(x-1)+\frac{79\sqrt{2}}{32}(x-1)^2+o((x-1)^2)$$

Exercice 12.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$f(x)=\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x\ln(1+x)}$$

Correction exercice 12.

$$\ln(\mathrm{ch}(x))=\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+o(X^2)$$

Avec $X=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$, $X^2=\frac{x^4}{4}+o(x^4)$ et $o(X^2)=o(x^4)$

Donc

$$\ln(\mathrm{ch}(x))=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)+o(x^4)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

$$x\ln(1+x)=x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

$$f(x)=\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x\ln(1+x)}=\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{1}{2} \qquad -\frac{x^2}{12}+o(x^2) & 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3} \\
\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{6}+o(x^2) & \\
\hline
\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}+o(x^2) & \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8} \\
\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+o(x^2) & \\
\hline
-\frac{x^2}{8}+o(x^2) & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|}
-\frac{x^2}{8}+o(x^2) \\
\hline
o(x^2)
\end{array}$$

Donc $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$

Exercice 13.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x)=\frac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)\operatorname{sh}(x)}$$

Correction exercice 13.

$$\ln(1+x)\operatorname{sh}(x)\underset{0}{\sim}x^2$$

Et

$$\cos(x)-1\underset{0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$$

Donc on pourra mettre x^2 en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifier par x^2, il faut donc faire des développements limités à l'ordre $2+3=5$ pour finalement obtenir un développement limité à l'ordre 3.

$$\cos(x)-1=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)-1=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)=x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)\right)$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\operatorname{sh}(x)&=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\\&=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\end{aligned}$$

Je me suis contenter de faire des développements à l'ordre 4 parce que les deux factorisations par x (donc par x^2) permettent d'obtenir le produit de x^2 par un produit de développements limités à l'ordre 3 (qui donne un développement limité à l'ordre 3) c'est-à-dire un développement limité à l'ordre 5.
Si on avait fait des développements limités de $\ln(1+x)$ et de $\operatorname{sh}(x)$ à l'ordre 5, on aurait juste constaté que les deux termes de degré 5 n'auraient servi à rien (donc rien de bien grave).

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\operatorname{sh}(x)&=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\\&=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right]x^2+\left[-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\right]x^3+o(x^3)\right)\\&=x^2\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)\end{aligned}$$

Donc

$$f(x)=\frac{x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}$$

Il reste à faire une division suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{l|l}
-\frac{1}{2}\qquad+\frac{1}{24}x^2\qquad+o(x^3) & 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3) \\
\cline{2-2}
-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3) & -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3) \\
\cline{1-1}
\quad-\frac{1}{4}x+\frac{7}{24}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3) & \\
\quad-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x^3+o(x^3) & \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

$\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$ $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$	
$\frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$ $\frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$	
$+o(x^3)$	

Et finalement

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$$

Exercice 14.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de :
$$f(x) = \ln(1 + \mathrm{sh}(x))$$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :
$$g(x) = \frac{\ln(1 + \mathrm{sh}(x))}{\sin(x)}$$
3. Montrer que g est prolongeable par continuité en $x = 0$.

Correction exercice 14.

1.
$$\ln\big(1 + \mathrm{sh}(x)\big) = \ln\left(1 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$$

Avec $X = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $X^2 = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^2 + o(x^3)$, $X^3 = x^3 + o(x^3)$ et $o(X^3) = o(x^3)$

$$\ln\big(1 + \mathrm{sh}(x)\big) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{3} + o(x^3)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

2.
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc

$$g(x) = \frac{\ln\big(1 + \mathrm{sh}(x)\big)}{\sin(x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$
$$= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$
$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \frac{1}{1 + X} = 1 - X + o(X)$$

Avec $X = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$ et $o(X) = o(x^2)$

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

On aurait aussi pu faire une division suivant les puissances croissantes

$$g(x)=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)=1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^2+o(x^2)$$
$$=1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$$

3.

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)\right)=1$$

donc g est prolongeable par continuité par la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$

Exercice 15.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction définie par :
$$h(x)=\frac{\sin(x)\operatorname{sh}(x)}{\sin(x^2)}$$
2. En déduire un équivalent de $h(x)-1$ au voisinage de 0.

Correction exercice 15.

1.

$$\sin(x)\operatorname{sh}(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)$$
$$=x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)$$
$$=x^2\left(1+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^2+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{120}\right)x^4+o(x^4)\right)$$
$$=x^2\left(1-\frac{1}{90}x^4+o(x^4)\right)=x^2-\frac{1}{90}x^6+o(x^6)$$

Donc

Il faut faire un développement limité au même ordre du dénominateur

$$h(x)=\frac{x^2-\frac{1}{90}x^6+o(x^6)}{x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6)}=\frac{1-\frac{1}{90}x^4+o(x^4)}{1-\frac{x^4}{6}+o(x^4)}=\left(1-\frac{1}{90}x^4+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right)$$
$$=1+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{90}\right)x^4+o(x^4)=1+\frac{7}{45}x^4+o(x^4)$$

2.

$$h(x)-1=\frac{7}{45}x^4+o(x^4)\sim\frac{7}{45}x^4$$

Exercice 16.

Déterminer la limite suivante, sans préjugée qu'elle existe :
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(x)}-e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x)-\operatorname{ch}(x)}$$

Correction exercice 16.

$$\cos(x)-\operatorname{ch}(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=-x^2+o(x^2)=x^2\big(-1+o(1)\big)$$
$$e^{\cos(x)}-e^{\operatorname{ch}(x)}=e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}-e^{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=ee^{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}-ee^{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$
$$=e\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-e\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=e\big(-x^2+o(x^2)\big)=x^2\big(-e+o(1)\big)$$

$$\frac{e^{\cos(x)} - e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x) - \operatorname{ch}(x)} = \frac{x^2\big(-e + o(1)\big)}{x^2\big(-1 + o(1)\big)} = \frac{-e + o(1)}{-1 + o(1)}$$

Par conséquent

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\cos(x)} - e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x) - \operatorname{ch}(x)} = e$$