Feuille 3 Algèbre
Applications linéaires

Exercice 1.

Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec $a \in \mathbb{R}$).

a) $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (y,x) \end{array}$ b) $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x,a) \end{array}$ c) $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (ax,ay) \end{array}$ d) $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+a,y+a) \end{array}$

e) $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x+z,y+z) \end{array}$ f) $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (2x,0,x-y) \end{array}$ g) $\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{array}$

Exercice 2.

Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définies par

$$f(x,y) = (x,0) \quad \text{et} \quad g(x,y) = (0,y)$$

Déterminer $f+g$, $f \circ g$, f^2 et g^2.

Exercice 3.

On considère $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = -e_1, \quad f(e_3) = e_3$$

1. Déterminer l'image par f d'un élément $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
3. Montrer que $f \circ f = f$

Exercice 4.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3, \qquad f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3, \quad f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3$$

Où $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = u\}$ et $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = -u\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.
2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Exercice 5.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_1$$

Où $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que $f^3 = Id_{\mathbb{R}^3}$.
3. Démontrer que $F = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.

Exercice 6.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image de la base canonique $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$f(e_1) = -7e_1 - 6e_2$$
$$f(e_2) = 8e_1 + 7e_2$$
$$f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3$$

Calculer $f^2 = f \circ f$

En déduire que f est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer f^{-1}.

Exercice 7.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f. En déduire la dimension de $\mathrm{im}(f)$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Exercice 8.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?
3. En déduire que u est surjective.

Exercice 9.

Soit $u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4)$$

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

1. Donner une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
2. Donner une base (La plus simple possible) de $Im(u)$ et sa dimension.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^4$?
4. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et sa dimension.
5. A-t-on $\ker(u) \oplus E = \mathbb{R}^4$?

Exercice 10.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $Im(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 11. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ tel que $f^2 = f$ (on dit que f est un projecteur).

1. Démontrer que $Id_{\mathbb{K}^n} - f$ est un aussi un projecteur.
2. Démontrer que $\ker(Id_{\mathbb{K}^n} - f) = \mathrm{im}(f)$.
3. Démontrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont supplémentaires.
4. Donner un exemple de projecteur p dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 12.

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

1. Montrer que si $v_1, v_2, \dots, v_p$ engendrent $\mathbb{R}^n$ alors $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)$ engendrent $\mathrm{im}(f)$.
2. Montrer que si $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)$ forment un système libre alors $v_1, v_2, \dots, v_p$ est libre aussi.
3. Montrer que si f est injective et si $v_1, v_2, \dots, v_p$ est un système libre alors $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)$ est libre aussi.

Exercice 13.

Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tels que $u \circ v = 0$. Montrer que : $\mathrm{im}(v) \subseteq \ker(u)$
En déduire que : $rang(u) + rang(v) \leq n$

Exercice 14.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note φ et ψ les deux applications de E vers E définies respectivement (pour tout $f \in E$) par :

$$\varphi(f) = f'; \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1. Vérifier de φ et ψ sont linéaires.
2. Exprimer $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$.
3. Discuter la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité respectives de φ et ψ.

Exercice 15.

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ engendré par les fonctions sin et cos .

1. Déterminer une base de H et préciser sa dimension.
2. Soit $F = \left\{f \in H \middle| f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de F.
3. Soit φ l'application de H vers $\mathbb{R}^2$ définie pour toute $f \in H$ par
$$\varphi(f) = \left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
Montrer que φ est une bijection linéaire.
4. Soit ψ l'application de H vers H définie pour toute $f \in H$ par $\psi(f) = f'$. Montrer que ψ est un automorphisme de H.

Exercice 16.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$
Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :
$f(e_1) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3)$, $f(e_2) = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$ et $f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$
Soient $E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$ et $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ appartiennent à E_{-1} et que $e_1 + e_2 + e_3$ appartient à E_1.
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1} \cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2 = f \circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 17.

Soit u une application linéaire de E dans E, E étant un espace vectoriel de dimension n avec n pair.
Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes
(a) $u^2 = O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n = 2\dim(Im(u))$
(b) $Im(u) = \ker(u)$

Exercice 18.

Soit $u: E \to E$ une application linéaire et λ un réel.

1. Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$. Calculer $u(x)$ pour $x \in E_\lambda$

Montrer que est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E, montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$

Exercice 19.

Soient f et g deux endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap Im(f)$$

Exercice 20.

Soit u un endomorphisme de E, un espace vectoriel.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\ker(u) \cap im(u) = \{0_E\}$

(ii) $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Exercice 21.

Pour une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On définit la trace de A par :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, et que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si A et B sont deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.
3. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $\mathrm{tr}(A) \neq -1$, déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X + \mathrm{tr}(X)A = B$.
4. Montrer que l'on peut pas trouver $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 22.

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à deux lignes et deux colonnes.

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\phi(A) = A - {}^tA$$

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de ϕ, c'est-à-dire les matrices telles que $\phi(A) = O$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, quel est sa dimension ?
3. Déterminer l'image de ϕ, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de la forme $\phi(A)$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice J, à déterminer tel que $\phi(A) = \lambda J$.