Feuille 3 Algèbre
Applications linéaires

Exercice 1.

Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec $a \in \mathbb{R}$).

a) $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (y,x) \end{array}$ b) $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x,a) \end{array}$ c) $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (ax,ay) \end{array}$ d) $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+a,y+a) \end{array}$

e) $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x+z,y+z) \end{array}$ f) $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (2x,0,x-y) \end{array}$ g) $\begin{array}{c} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{array}$

Correction exercice 1.

a) Soient $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $u'=(x',y')\in\mathbb{R}^2$ et soient λ,λ' deux réels
$$\lambda u+\lambda' u'=\lambda(x,y)+\lambda'(x',y')=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y')$$
$$f(\lambda u+\lambda' u')=f(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y')=(\lambda y+\lambda' y',\lambda x+\lambda' x')=\lambda(y,x)+\lambda'(y',x')$$
$$=\lambda f(u)+\lambda' f(u'))$$
Donc f est linéaire.

b) Si $a\neq 0$ alors $f(0,0)=(0,a)\neq 0_{\mathbb{R}^2}$ donc f n'est pas linéaire.
Si $a=0$ alors
Soient $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $u'=(x',y')\in\mathbb{R}^2$ et soient λ,λ' deux réels
$$\lambda u+\lambda' u'=\lambda(x,y)+\lambda'(x',y')=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y')$$
$$f(\lambda u+\lambda' u')=f(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y')=(\lambda x+\lambda' x',0)=\lambda(x,0)+\lambda'(x',0)=\lambda f(u)+\lambda' f(u'))$$
Donc f est linéaire.

c) Soient $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $u'=(x',y')\in\mathbb{R}^2$ et soient λ,λ' deux réels
$$\lambda u+\lambda' u'=\lambda(x,y)+\lambda'(x',y')=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y')$$
$$f(\lambda u+\lambda' u')=f(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y')=\big(a(\lambda x+\lambda' x'),a(\lambda y+\lambda' y')\big)=\lambda'(ax,ay)+\lambda'(ax',ay')$$
$$=\lambda f(u)+\lambda' f(u'))$$
Donc f est linéaire.

d) Si $a=0$ alors $f=Id_{\mathbb{R}^2}$ c'est une application linéaire
Si $a\neq 0$ alors $f(0,0)=(a,a)\neq(0,0)$ donc ce n'est pas une application linéaire.

Exercice 2.

Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définies par
$$f(x,y)=(x,0) \qquad \text{et} \qquad g(x,y)=(0,y)$$
Déterminer $f+g$, $f\circ g$, f^2 et g^2.

Correction exercice 2. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,y)=Id_{\mathbb{R}^2}(x,y)$$
Donc $f+g=Id_{\mathbb{R}^2}$, l'application identité de $\mathbb{R}^2$
$$f\circ g(x,y)=f\big(g(x,y)\big)=f(0,y)=(0,0)=\Theta_{\mathbb{R}^2}(x,y)$$
Donc $f\circ g=\Theta_{\mathbb{R}^2}$, l'application nulle de $\mathbb{R}^2$
$$f^2(x,y)=f\circ f(x,y)=f\big(f(x,y)\big)=f(x,0)=(x,0)=f(x,y)$$
Donc $f^2=f$, on verra plus tard qu'il s'agit d'une projection
$$g^2(x,y)=g\circ g(x,y)=g\big(g(x,y)\big)=g(0,y)=(0,y)=g(x,y)$$

Donc $g^2 = g$, on verra plus tard qu'il s'agit d'une projection

Exercice 3.

On considère $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = -e_1, \quad f(e_3) = e_3$$

1. Déterminer l'image par f d'un élément $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
3. Montrer que $f \circ f = f$

Correction exercice 3.

1. Première méthode, sans les matrices, pour tout $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$$f(u) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = xe_1 - ye_1 + ze_3 = (x-y)e_1 + ze_3$$
$$= (x-y, 0, z)$$

Deuxième méthode

La matrice A de f dans la base $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'image d'un vecteur $u = (x, y, z)$ donc les coordonnées dans la base β sont évidemment

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sont

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Ce qui montre que

$$f(u) = (x-y, 0, z)$$

2.

$$u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x-y, 0, z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

Un vecteur $u \in \ker(f)$ est donc de la forme $u = (x, x, 0) = x(1,1,0)$

Donc $\ker(f) = Vect\big((1,1,0)\big) = Vect(e_1 + e_2)$ il s'agit de la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_1 + e_2$.

D'après le cours

$$Im(f) = Vect\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) = Vect(e_1, -e_1, e_3) = Vect(e_1, e_3)$$

La famille (e_1, e_3) est libre, soit parce que e_1 et e_3 ne sont pas proportionnels, soit parce que c'est une sous famille de (e_1, e_2, e_3) qui est une base donc libre.

La famille (e_1, e_3) engendre $Im(f)$ et elle est libre, c'est une base de $im(f)$

3.

$$f \circ f(e_1) = f\big(f(e_1)\big) = f(e_1)$$
$$f \circ f(e_2) = f\big(f(e_2)\big) = f(-e_1) = -f(e_1) = -e_1 = f(e_2)$$
$$f \circ f(e_3) = f\big(f(e_3)\big) = f(e_3)$$

On verra au fur et à mesure que cela suffit à montrer que $f^2 = f$

Pour l'instant, on en reste aux bases, comme f^2 est linéaire, pour tout $u = (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$f^2(u) = f^2(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf^2(e_1) + yf^2(e_2) + zf^2(e_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = f(u)$

Ce qui montre que $f^2 = f$

Exercice 4.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3, \qquad f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3, \; f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3$$

Où $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = u\}$ et $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = -u\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.
2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Correction exercice 4.

1. Première méthode

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Donc $0_{\mathbb{R}^3}$ car f est linéaire.

Soient $u = (x, y, z) \in F_1$ et $u' = (x', y', z') \in F_1$ et soient λ et λ' deux réels.

On a $f(u) = u$ et $f(u') = u'$.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u')$$

Car f est linéaire, puis

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda u + \lambda' u'$$

Ce qui montre que $\lambda u + \lambda' u' \in F_1$, donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Deuxième méthode

$$u \in F_1 \Leftrightarrow f(u) = u \Leftrightarrow f(u) - u = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow f(u) - Id_{\mathbb{R}^3}(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (f - Id_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Comme $f - Id_{\mathbb{R}^3}$ est une application linéaire, $F_1 = \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$ il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Troisième méthode

On a

$$A = mat_\beta(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

$$u = (x, y, z) \in F_1 \Leftrightarrow f(u) = u \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x - 8y - 12z = x \\ 12x - 7y - 12z = y \\ 6x - 4y - 5z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 8y - 12z = 0 \\ 12x - 8y - 12z = 0 \\ 6x - 4y - 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x - 2y - 3z = 0$$

Puisque les trois équations sont proportionnelles

Donc

$$u = (x, y, z) \in F_1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y + z \Leftrightarrow u = \left(\frac{2}{3}y + z, y, z\right) = \frac{y}{3}(2,3,0) + z(0,0,1)$$

Ce qui montre que

$$F_1 = Vect\big((2,3,0), (0,0,1)\big) = Vect(2e_1 + 3e_2, e_3)$$

F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$(2e_1 + 3e_2, e_3)$ forment une famille génératrice de F_1, les deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une base de F_1, et alors $\dim(F_1) = 2$, c'est un plan de $\mathbb{R}^3$.

Pour F_2

Première méthode

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}$$

Donc $0_{\mathbb{R}^3}$ car f est linéaire.

Soient $u = (x, y, z) \in F_2$ et $u' = (x', y', z') \in F_2$ et soient λ et λ' deux réels.

On a $f(u) = -u$ et $f(u') = -u'$.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u')$$

Car f est linéaire, puis

$$f(\lambda u+\lambda' u')=-\lambda u-\lambda' u'=-(\lambda u+\lambda' u')$$

Ce qui montre que $\lambda u+\lambda' u'\in F_2$, donc F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Deuxième méthode

$$u\in F_2\Leftrightarrow f(u)=-u\Leftrightarrow f(u)+u=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow f(u)+Id_{\mathbb{R}^3}(u)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow (f+Id_{\mathbb{R}^3})(u)=0_{\mathbb{R}^3}$$

Comme $f+Id_{\mathbb{R}^3}$ est une application linéaire, $F_2=\ker(f+Id_{\mathbb{R}^3})$ il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Troisième méthode

On a

$$A=mat_\beta(f)=\begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1\\ e_2\\ e_3\end{matrix}\end{array}$$

$$u=(x,y,z)\in F_2\Leftrightarrow f(u)=-u\Leftrightarrow AX=-X\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}13x-8y-12z=-x\\12x-7y-12z=-y\\6x-4y-5z=-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14x-8y-12z=0\\12x-6y-12z=0\\6x-4y-4z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}7x-4y-6z=0\\2x-y-2z=0\\3x-2y-2z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\7L_2-2l_1\\2L_3-3L_2\end{matrix}\begin{cases}7x-4y-6z=0\\y-2z=0\\-y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x-4y-6z=0\\y=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=4y+6z\\y=2z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7x=14z\\y=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2z\\y=2z\end{cases}$$

Donc

$$u=(x,y,z)\in F_1\Leftrightarrow\begin{cases}x=2z\\y=2z\end{cases}\Leftrightarrow u=(2z,2z,z)=z(2,2,1)$$

Ce qui montre que

$$F_1=Vect\big((2,2,1)\big)=Vect(2e_1+2e_2+e_3)$$

F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$(2e_1+2e_2+e_3)$ est une famille génératrice de F_2, ce vecteurs est non nulc'est une base de F_2, et alors $\dim(F_2)=1$, c'est une droite de $\mathbb{R}^3$.

2. Première méthode (pas terrible)

   Il faut montrer que $F_1\cap F_2=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$u=(x,y,z)\in F_1\cap F_2\Leftrightarrow\begin{cases}u\in F_1\\u\in F_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y-3z=0\\x=2z\\y=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\x=2z\\y=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\x=0\\y=0\end{cases}$$

   Deuxième méthode

$$u\in F_1\cap F_2\Leftrightarrow\begin{cases}u\in F_1\\u\in F_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(u)=u\\f(u)=-u\end{cases}\Rightarrow u=-u\Rightarrow u=0_{\mathbb{R}^3}$$

   Ce qui montre que $F_1\cap F_2=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ les deux espaces sont donc supplémentaires

   De plus comme $\dim(F_1)+\dim(F_2)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ on a $F_1\oplus F_2=\mathbb{R}^3$

Exercice 5.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1)=e_2,\quad f(e_2)=e_3,\quad f(e_3)=e_1$$

Où $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que $f^3=Id_{\mathbb{R}^3}$.
3. Démontrer que $F=\{u\in\mathbb{R}^3,f(u)=u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.

Correction exercice 5.

1. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,
$$f(u)=f(xe_1+ye_2+ze_3)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=xe_2+ye_3+ze_1=(z,x,y)$$
En utilisant la définition de la bijection réciproque
Pour tout $u'=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$, (l'ensemble d'arrivée) on va montrer qu'il existe un unique $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (l'ensemble de départ) tel que $u'=f(u)$
$$u'=f(u)\Leftrightarrow f(u)=u'\Leftrightarrow (z,x,y)=(x',y',z')\Leftrightarrow\begin{cases}x=y'\\y=z'\\z=x'\end{cases}$$
Chaque u' admet bien un unique antécédent, f est bijective.
2.
$$f^3(e_1)=f\circ f\circ f(e_1)=f\circ f\big(f(e_1)\big)=f\circ f(e_2)=f\big(f(e_2)\big)=f(e_3)=e_1$$
$$f^3(e_2)=f\circ f\circ f(e_2)=f\circ f\big(f(e_2)\big)=f\circ f(e_3)=f\big(f(e_3)\big)=f(e_1)=e_2$$
$$f^3(e_3)=f\circ f\circ f(e_3)=f\circ f\big(f(e_3)\big)=f\circ f(e_1)=f\big(f(e_1)\big)=f(e_2)=e_3$$
On verra au fur et à mesure que cela suffit à montrer que $f^3=Id_{\mathbb{R}^3}$
Pour l'instant, on en reste aux bases, comme f^3 est linéaire, pour tout $u=(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$
$$f^3(u)=f^3(xe_1+ye_2+ze_3)=xf^3(e_1)+yf^3(e_2)+zf^3(e_3)=xe_1+ye_2+ze_3=u=Id_{\mathbb{R}^3}(u)$$
Ce qui montre que $f^3=Id_{\mathbb{R}^3}$
3. Première méthode
$$f(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}$$
Donc $0_{\mathbb{R}^3}$ car f est linéaire.
Soient $u=(x,y,z)\in F$ et $u'=(x',y',z')\in F$ et soient λ et λ' deux réels.
On a $f(u)=u$ et $f(u')=u'$.
$$f(\lambda u+\lambda'u')=\lambda f(u)+\lambda' f(u')$$
Car f est linéaire, puis
$$f(\lambda u+\lambda'u')=\lambda u+\lambda'u'$$
Ce qui montre que $\lambda u+\lambda'u'\in F_1$, donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Deuxième méthode
$$u\in F\Leftrightarrow f(u)=u\Leftrightarrow f(u)-u=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow f(u)-Id_{\mathbb{R}^3}(u)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow (f-Id_{\mathbb{R}^3})(u)=0_{\mathbb{R}^3}$$
Comme $f-Id_{\mathbb{R}^3}$ est une application linéaire, $F_1=\ker(f-Id_{\mathbb{R}^3})$ il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Troisième méthode
$$u=(x,y,z)\in F\Leftrightarrow f(u)=u\Leftrightarrow (z,x,y)=(x,y,z)\Leftrightarrow\begin{cases}z=x\\x=y\\y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z$$
Donc un vecteur de F s'écrit $u=(x,x,x)=x(1,1,1)=x(e_1+e_2+e_3)$
Ce qui montre que $F=vect(e_1+e_2+e_3)$, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $e_1+e_2+e_3$ est un vecteur non nul qui engendre F, c'est une base et $\dim(F)=1$, c'est une droite de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image de la base canonique $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ est :
$$f(e_1)=-7e_1-6e_2$$
$$f(e_2)=8e_1+7e_2$$
$$f(e_3)=6e_1+6e_2-e_3$$
Calculer $f^2=f\circ f$
En déduire que f est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer f^{-1}.

Correction exercice 6.

La matrice de $f \circ f$ dans la base β est $Mat_\beta(f) \times Mat_\beta(f)$

Or $Mat_\beta(f) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $Mat_\beta(f^2) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Il existe g telle que $g \circ f = Id$ donc f est bijective et $f^{-1} = f$.

Exercice 7.

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f. En déduire la dimension de $\text{im}(f)$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Correction exercice 7.

1.
$$f(e_1) = 1;\ f(e_2) = 1;\ f(e_3) = 1 \text{ et } f(e_4) = 1$$
Donc
$$Im(f) = \{1\} \quad et \quad \dim\big(im(f)\big) = 1$$
2. D'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 3$$
$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) \Leftrightarrow x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$$
$$= x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$$
On pose $a = (-1,1,0,0), b = (-1,0,1,0)$ et $c = (-1,0,0,1)$
(a, b, c) est une famille génératrice de $\ker(f)$ avec trois vecteurs et $\dim(\ker(f)) = 3$ donc (a, b, c) est une base de $\ker(f)$.

Exercice 8.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?
3. En déduire que u est surjective.

Correction exercice 8.

1. Soient $a = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $a' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$ et soient λ, λ' deux réels.
$$\lambda a + \lambda' a' = \lambda(x, y, z, t) + \lambda'(x', y', z', t') = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t')$$
Et on note $(X, Y, Z, T) = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t')$
$$u(\lambda a + \lambda' a') = (X + Y + Z + T, Y - T, X - 2Z + 3T)$$
$$= \big((\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t'), (\lambda y + \lambda' y')$$
$$- (\lambda t + \lambda' t'), (\lambda x + \lambda' x') - 2(\lambda z + \lambda' z') + 3(\lambda t + \lambda' t')\big)$$
$$= \big(\lambda(x + y + z + t) + \lambda'(x' + y' + z' + t'), \lambda(y - t) + \lambda'(y' - t'), \lambda(x - 2z + 3t)$$
$$+ \lambda'(x' - 2z' + 3t')\big)$$
$$= \lambda(x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t) + \lambda'(x' + y' + z' + t', y' - t', x' - 2z' + 3t')$$
$$= \lambda u(x, y, z, t) + \lambda' u(x', y', z', t') = \lambda u(a) + \lambda' u(a')$$
Ce qui montre que u est linéaire.
2. Soit $a = (x, y, z, t) \in \ker(u)$

$$u(a)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow (x+y+z+t,y-t,x-2z+3t)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z+t=0\\ y-t=0\\ x-2z+3t=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}x+y+z+t=0\\ y=t\\ x-2z+3t=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}x+z+2t=0\\ y=t\\ -3z-y+2t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-z-2t\\ y=t\\ z=\dfrac{t}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{7}{3}t\\ y=t\\ z=\dfrac{t}{3}\end{cases}$$

$$a=\left(-\frac{7}{3}t,t,\frac{t}{3},t\right)=\frac{t}{3}(-7,3,1,3)$$

Donc

$$\ker(u)=Vect\big((-7,3,1,3)\big)$$

Il s’agit d’une droite, et donc $\dim(\ker(u))=1$

3. D’après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)=4$$

Ce qui entraine que $\dim\big(im(u)\big)=3$, comme $im(u)\subset\mathbb{R}^3$ et qu’ils ont la même dimension, ces espaces vectoriels sont égaux donc $Im(u)=\mathbb{R}^3$ et donc u est surjective.

Exercice 9.

Soit $u:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ l’application définie pour tout $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$ par :

$$u(x)=(x_1-x_2+x_3,0,x_1+x_2-x_3+x_4,x_4)$$

Soit $E=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4, x_1+x_2-x_3+x_4=0\}$

1. Donner une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
2. Donner une base (La plus simple possible) de $Im(u)$ et sa dimension.
3. A-t-on $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^4$?
4. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et sa dimension.
5. A-t-on $\ker(u)\oplus E=\mathbb{R}^4$?

Correction exercice 9.

1.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker(u)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ 0=0\\ x_1+x_2-x_3+x_4=0\\ x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+x_2-x_3=0\\ x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=x_3\\ x_4=0\end{cases}$$

Donc $x=(0,x_3,x_3,0)=x_3(0,1,1,0)$, si on pose $a=e_2+e_3$ alors $\ker(u)=vect(a)$ et donc la dimension de $\ker(u)$ est 1.

2.

$$u(e_1)=(1,0,1,0)=e_1+e_3;\ u(e_2)=(-1,0,1,0)=-e_1+e_3;$$
$$u(e_3)=(1,0,-1,0)=e_1-e_3;\ u(e_4)=(0,0,0,1,1)=e_3+e_4$$
$$Im(u)=Vect(e_1+e_3,-e_1+e_3,e_1-e_3,e_3+e_4)=Vect(e_1+e_3,e_1-e_3,e_3+e_4)$$

Car $u(e_2)=-u(e_3)$

$$Im(u)=Vect(e_1+e_3,e_1-e_3+e_1+e_3,e_3+e_4)=Vect(e_1+e_3,2e_1,e_3+e_4)$$
$$=Vect(e_3,e_1,e_3+e_4)=Vect(e_3,e_1,e_4)$$

Cette famille est une sous-famille d’une famille libre, elle est libre (et génératrice) donc c’est une base de $Im(u)$

Autre méthode, d’après le théorème de rang

$$\dim(\ker(u) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^4) \Rightarrow \dim\big(Im(u)\big) = 3$$

Par conséquent $(e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_3 + e_4)$ est une famille génératrice à trois vecteurs dans un espace de dimension trois, c'est une base et donc $\dim\big(Im(u)\big) = 3$.

3. Comme $\dim(\ker(u) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^4)$
   Le tout est de savoir si $a = e_2 + e_3$ appartient à $Im(u)$, si c'est le cas $\ker(u) \subset Im(u)$ et il n'y a pas de somme directe et sinon $\ker(u) \cap Im(u) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et il y a somme directe.
   Soit on montre que $(e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_3 + e_4)$ est libre et donc une base de $\mathbb{R}^4$ puisqu'il s'agit d'une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 et on a
   $$\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^4$$
   Soit
   $$\ker(u) + Im(u) = vect(e_1, e_3, e_4, e_2 + e_3) = Vect(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$$
   Ce qui montre que $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^4$.
4. $0 + 0 - 0 + 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^4} \in E$.
   Soient $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in E$, on a
   $$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = 0$$
   Pour tous λ et μ réels
   $$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4)$$
   $$(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) - (\lambda x_3 + \mu y_3) + (\lambda x_4 + \mu y_4)$$
   $$= \lambda(x_1 + x_2 - x_3 + x_4) + \mu(y_1 + y_2 - y_3 + y_4) = 0$$
   Ce qui montre que $\lambda x + \mu y \in E$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$, on a $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ donc $x_1 = -x_2 + x_3 - x_4$
   $$x = (-x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(-1,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(-10,0,1)$$
   On pose $b = (-1,1,0,0)$, $c = (1,0,1,0)$ et $d = (-10,0,1)$, la famille (a, b, c) engendre E
   $$\alpha b + \beta c + \gamma d = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(-1,1,0,0) + \beta(1,0,1,0) + \gamma(-10,0,1) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
   Ce que signifie que (b, c, d) est une famille libre. Par conséquent (b, c, d) est une base de E.
5. $\ker(u) = Vect(a)$ avec $a = e_2 + e_3 = (0,1,1,0)$ donc $0 + 1 - 1 + 0 = 0$ ce qui montre que $a \in E$, autrement dit $\ker(u) \subset E$, on n'a pas : $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^4$

Exercice 10.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :
$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $Im(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?

Correction exercice 10.

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soient λ et μ deux réels.
   $$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$$

$$
\begin{aligned}
u(\lambda x+\mu y) &= \big(-2(\lambda x_1+\mu y_1)+4(\lambda x_2+\mu y_2)+4(\lambda x_3+\mu y_3), -(\lambda x_1+\mu y_1)+\lambda x_3 \\
&\quad +\mu y_3, -2(\lambda x_1+\mu y_1)+4(\lambda x_2+\mu y_2)+4(\lambda x_3+\mu y_3)\big) \\
&= (\lambda[-2x_1+4x_2+4x_3]+\mu[-2y_1+4y_2+y_3], \lambda[-x_1+x_3] \\
&\quad +\mu[-y_1+y_3], \lambda[-2x_1+4x_2+4x_3]+\mu[-2y_1+4y_2+y_3]) \\
&= \lambda(-2x_1+4x_2+4x_3, -x_1+x_3, -2x_1+4x_2+4x_3) \\
&\quad +\mu(-2y_1+4y_2+4y_3, -y_1+y_3, -2y_1+4y_2+4y_3) = \lambda u(x)+\mu u(y)
\end{aligned}
$$

Donc u est linéaire.

2. Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u)$ et $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$
x\in\ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1+4x_2+4x_3=0 \\ -x_1+x_3=0 \\ -2x_1+4x_2+4x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1+2x_2+2x_3=0 \\ x_1=x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2+x_3=0 \\ x_1=x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-\frac{1}{2}x_3 \\ x_1=x_3 \end{cases}
$$

$$
x=\left(x_3,-\frac{1}{2}x_3,x_3\right)=\frac{x_3}{2}(2,-1,2)
$$

$a=(2,-1,2)=2e_1-e_2+2e_3$ est un vecteur non nul qui engendre $\ker(u)$, c'est une base de $\ker(u)$.

$$
Im(u)=Vect\big(u(e_1),u(e_2),u(e_3)\big)
$$

D'après le théorème du rang,

$$
\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1+\dim\big(Im(u)\big)=3 \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big)=2
$$

$u(e_1)=-2e_1-e_2-2e_3=(-2,-1,-2)$ et $u(e_2)=4e_1+4e_3=(4,0,4)$, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $Im(u)$ qui est de dimension 2, $\big(u(e_1),u(e_2)\big)$ est une base de $Im(u)$.

3. $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \big(a,u(e_1),u(e_2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Il est presque évident que

$$
u(e_1)+u(e_3)=a
$$

Sinon on calcule $\alpha a+\beta u(e_1)+\gamma u(e_3)=0_{\mathbb{R}^3}$ et on s'aperçoit que $\alpha=1$, $\beta=-1$ et $\gamma=-1$ est une solution non nulle.
$\big(a,u(e_1),u(e_2)\big)$ n'est pas une base, donc on n'a pas $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^3$

Exercice 11. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ tel que $f^2=f$ (on dit que f est un projecteur).

1. Démontrer que $Id_{\mathbb{K}^n}-f$ est un aussi un projecteur.
2. Démontrer que $\ker(Id_{\mathbb{K}^n}-f)=\mathrm{im}(f)$.
3. Démontrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont supplémentaires.
4. Donner un exemple de projecteur p dans $\mathbb{R}^n$.

Correction exercice 11.

1.

$$
\begin{aligned}
(Id_{\mathbb{K}^n}-f)^2 &= (Id_{\mathbb{K}^n}-f)\circ(Id_{\mathbb{K}^n}-f) = Id_{\mathbb{K}^n}\circ Id_{\mathbb{K}^n} - Id_{\mathbb{K}^n}\circ f - f\circ Id_{\mathbb{K}^n} + f\circ f \\
&= Id_{\mathbb{K}^n}-f-f+f^2 = Id_{\mathbb{K}^n}-2f+f^2 = Id_{\mathbb{K}^n}-2f+f = Id_{\mathbb{K}^n}-f
\end{aligned}
$$

Donc $Id_{\mathbb{K}^n}-f$ est un projecteur de $\mathbb{K}^n$

2. Soit $u\in\ker(Id_{\mathbb{K}^n}-f)$

$$
(Id_{\mathbb{K}^n}-f)(u)=0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow Id_{\mathbb{K}^n}(u)-f(u)=0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow u-f(u)=0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow u=f(u)
$$

Comme u est de la forme $f(v)$ avec $v\in\mathbb{K}^n$, ici $v=u$, alors $u\in im(f)$
Cela montre que $\ker(Id_{\mathbb{K}^n}-f)\subset\mathrm{im}(f)$.
Soit $u\in im(f)$, il existe $v\in\mathbb{K}^n$ tel que $u=f(v)$, ce que l'on compose par f

$$
f(u)=f^2(v)=f(v) \quad \text{car } f^2=f
$$

Puis $f(u)=u$ car $f(v)=u$. Et enfin

$$f(u)=u \Leftrightarrow u-f(u)=0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow Id_{\mathbb{K}^n}(u)-f(u)=0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow (Id_{\mathbb{K}^n}-f)(u)=0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow u \in \ker(Id_{\mathbb{K}^n}-f)$$

Cela montre que $\mathrm{im}(f) \subset \ker(Id_{\mathbb{K}^n}-f)$

Par conséquent Cela montre que $\ker(Id_{\mathbb{K}^n}-f)=\mathrm{im}(f)$.

3. Soit $u \in \ker(f) \cap im(f) = \ker(f) \cap \ker(Id_{\mathbb{K}^n}-f)$

   On a

$$\begin{cases} f(u)=0_{\mathbb{K}^n} \\ f(u)=u \end{cases}$$

   D'après ce que l'on a vu plus haut. Par conséquent $u=0_{\mathbb{K}^n}$. Cela montre que

$$\ker(f) \cap im(f) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$$

   Montre que $\ker(f)$ et $im(f)$ sont supplémentaires.

4. Soit p définie par

$$p(e_1)=e_1 \quad \text{et } \forall k \in [\![2,n]\!], p(e_k)=0$$

   On vérifie facilement que $\forall k \in [\![1,n]\!], p^2(e_k)=p(e_k)$ donc pour tout $u=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$

$$p^2(u)=p(u)$$

   Comme on l'a vu dans les exercices précédents.

Exercice 12.

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

1. Montrer que si $v_1,v_2,\dots,v_p$ engendrent $\mathbb{R}^n$ alors $f(v_1),f(v_2),\dots,f(v_p)$ engendrent $\mathrm{im}(f)$.
2. Montrer que si $f(v_1),f(v_2),\dots,f(v_p)$ forment un système libre alors $v_1,v_2,\dots,v_p$ est libre aussi.
3. Montrer que si f est injective et si $v_1,v_2,\dots,v_p$ est un système libre alors $f(v_1),f(v_2),\dots,f(v_p)$ est libre aussi.

Correction exercice 12.

1. $v_1,v_2,\dots,v_p$ engendrent $\mathbb{R}^n$ signifie que pour tout $\in \mathbb{R}^n$, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ réels tel que :

$$v=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_pv_p$$

   Soit $f(v)$ un vecteur quelconque de $im(f)$, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ réels tel que :

$$f(v)=f(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_pv_p)=\lambda_1f(v_1)+\cdots+\lambda_pf(v_p)$$

   Ce qui montre que $f(v_1),f(v_2),\dots,f(v_p)$ engendrent $\mathrm{im}(f)$

2. Pour tous $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ réels

$$\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_pv_p=0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow f(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_pv_p)=f(0_{\mathbb{R}^n}) \Rightarrow \lambda_1f(v_1)+\cdots+\lambda_pf(v_p)=0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

   Car $f(v_1),f(v_2),\dots,f(v_p)$ forment un système libre.

3. Pour tous $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ réels

$$\lambda_1f(v_1)+\cdots+\lambda_pf(v_p)=0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow f(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_pv_p)=0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \lambda_1v_1+\cdots+\lambda_pv_p \in \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

4. Car f est injective. $v_1,v_2,\dots,v_p$ est un système libre entraine que : $\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0$, ce qui montre que $f(v_1),f(v_2),\dots,f(v_p)$ est libre aussi.

Exercice 13.

Soient $u,v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tels que $u \circ v = 0$. Montrer que : $\mathrm{im}(v) \subseteq \ker(u)$

En déduire que : $rang(u)+rang(v) \le n$

Correction exercice 13.

Soit y un vecteur de $\mathbb{K}^n$, il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y=v(x)$, ce que l'on compose par u :

$$u(y) = u \circ v(x) = 0_{\mathbb{K}^n}$$

Ce qui montre que $y \in \ker(u)$, on a bien : $\mathfrak{Im}(v) \subseteq \ker(u)$.

On rappelle que $rang(u) = \dim\big(im(u)\big)$ et que $rang(v) = \dim\big(im(v)\big)$

$$\dim\big(im(u)\big) + \dim\big(im(v)\big) \leq \dim\big(im(u)\big) + \dim(\ker(u))$$

Car $\mathrm{im}(v) \subseteq \ker(u) \Rightarrow \dim\big(im(v)\big) \leq \dim(ker(u))$

D'après le théorème du rang appliqué à u, $\dim\big(im(u)\big) + \dim(\ker(u)) = \dim(\mathbb{K}^n) = n$

Ce qui montre l'inégalité demandée.

Exercice 14.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note φ et ψ les deux applications de E vers E définies respectivement (pour tout $f \in E$) par :

$$\varphi(f) = f'; \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1. Vérifier de φ et ψ sont linéaires.
2. Exprimer $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$.
3. Discuter la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité respectives de φ et ψ.

Correction exercice 14.

1. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ et soient λ, μ deux réels
$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$
Cela montre que φ est linéaire.
Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ et soient λ, μ deux réels
$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t)dt = \int_0^x \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)dt = \lambda \int_0^x f(t)dt + \mu \int_0^x g(t)dt$$
$$= \lambda\psi(f)(x) + \mu\psi(g)(x)$$
Par conséquent $\psi(\lambda f + \mu g) = \lambda\psi(f) + \mu\psi(g)$; ce qui montre que ψ est linéaire.
2. Soit f une fonction de classe C^∞
$$\forall x \in \mathbb{R}, (\psi \circ \varphi)(f)(x) = \psi\big(\varphi(f)\big)(x) = \psi(f')(x) = \int_0^x f'(t)dt = [f(t)]_{t=0}^{t=x} = f(x) - f(0)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi \circ \psi)(f)(x) = \varphi\big(\psi(f)\big)(x) = \big(\psi(f)\big)'(x) = f(x)$$
3. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$ et g définie par $g(x) = x$
Alors $\varphi(f) = \varphi(g)$ et pourtant $f \neq g$ donc φ n'est pas injective.
Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ donc elle admet une primitive U (même une infinité égale à une constante près) telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $U'(x) = u(x)$, ce qui montre que $\varphi(U) = u$, φ est surjective.
Soient f et g deux fonctions de classe C^∞
$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \psi(g)(x) \Rightarrow \int_0^x f(t)dt = \int_0^x g(t)dt$$
On dérive cette dernière égalité pour trouver que $\forall x \in \mathbb{R}, f'x) = g(x)$ et que donc $f = g$, ce qui montre que ψ est injective.
Soit u la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $u(x) = x + 1$, s'il existe f de classe C^∞ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt = u(x) = x + 1$$
Est impossible car pour $x = 0$, $\psi(f)(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0 = u(0) = 1$, ce qui est impossible.
Remarque : On a $\varphi \circ \psi = Id$ de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ qui est de dimension infini, or en dimension finie si u et v sont des applications linéaires telles que $u \circ v = Id$ alors $v \circ v =$

Id et alors u et v sont des bijections réciproques l'une de l'autre et que $v = u^{-1}$ et que bien sûr $u = v^{-1}$, ce qui est faux en dimension infinie.

Exercice 15.

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions $\sin$ et $\cos$.

1. Déterminer une base de H et préciser sa dimension.
2. Soit $F = \left\{ f \in H \middle| f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de F.
3. Soit φ l'application de H vers $\mathbb{R}^2$ définie pour toute $f \in H$ par
$$\varphi(f) = \left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$
Montrer que φ est une bijection linéaire.
4. Soit ψ l'application de H vers H définie pour toute $f \in H$ par $\psi(f) = f'$. Montrer que ψ est un automorphisme de H.

Correction exercice 15.

1. $H = Vect(\sin, \cos)$, $(\sin, \cos)$ est une famille génératrice de H et ces deux fonctions sont intendantes, c'est évident mais on vérifie quand même
$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = 0 \\ \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$
$(\sin, \cos)$ est donc une famille libre et génératrice de H puisque $H = Vect(\sin, \cos)$, c'est une base de H.
2. L'application nulle de H notée Θ_H, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Theta_H(x) = 0$ vérifie $\Theta_H\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ donc $\Theta_H \in F$.
Soient f et g deux fonctions de F et soient λ, μ deux réels
$$(\lambda f + \mu g)\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lambda f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mu g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$$
Car $f \in F \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ et $g \in F \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Donc $\lambda f + \mu g \in F$, ce qui montre que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞.
D'autre par si $f \in F \subset H$, il existe α et β réels tels que $f = \alpha \sin + \beta \cos$, autrement dit
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$$
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \beta \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\sqrt{3}\beta$$
Ce qui entraine que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{3}\beta \sin(x) + \beta \cos(x) = \beta\left(-\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x)\right)$
Et que donc $F = Vect\left(-\sqrt{3}\sin + \cos\right)$. F est donc la droite engendré par la fonction $-\sqrt{3}\sin + \cos$.
3. Soient f et g deux fonctions de H et soient λ, μ deux réels
$$\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \left((\lambda f + \mu g)\left(-\frac{\pi}{4}\right), (\lambda f + \mu g)\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \left((\lambda f + \mu g)\left(-\frac{\pi}{4}\right), (\lambda f + \mu g)\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$
$$= \left(\lambda f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mu g\left(-\frac{\pi}{4}\right), \lambda f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mu g\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$
$$= \lambda \left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) + \mu \left(g\left(-\frac{\pi}{4}\right), g\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$
Ce qui montre que φ est linéaire.
Il reste à montrer que le noyau de φ est réduit au vecteur nul.

$$\varphi(f)=0_{\mathbb{R}^2}\Leftrightarrow\left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right),f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\beta\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\beta\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}+\beta\frac{\sqrt{2}}{2}=0\\ \alpha\frac{\sqrt{2}}{2}+\beta\frac{\sqrt{2}}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta=0\\ \alpha+\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$$

Cela montre que $\ker(\varphi)=\{\Theta_H\}$ donc φ est injective et comme les dimensions de l'ensemble de départ et d'arrivée sont les mêmes ($=2$) φ est bijective, alors linéaire et bijective « égal » automorphisme.

4. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ et soient λ,μ deux réels

$$\psi(\lambda f+\mu g)=(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'=\lambda\psi(f)+\mu\psi(g)$$

Cela montre que ψ est linéaire.

$$f\in H\Leftrightarrow\exists\alpha\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},f(x)=\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)$$

Montrons que le noyau de ψ est réduit au vecteur nul de H

$$\forall x\in\mathbb{R},\psi(f)(x)=0\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},f'(x)\Leftrightarrow 0\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\alpha\cos(x)-\beta\sin(x)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha\cos(0)-\beta\sin(0)=0\\ \alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\beta\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$$

$$\ker(\psi)=\{\Theta_H\}$$

ψ est injective et les ensembles de départ et d'arrivée sont les mêmes φ est bijective, alors linéaire et bijective et même ensemble de départ et d'arrivée « égal » isomorphisme.

Exercice 16.

Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$f(e_1)=-\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2+\frac{2}{3}e_3=\frac{1}{3}(-e_1+2e_2+2e_3)$, $f(e_2)=\frac{2}{3}e_1-\frac{1}{3}e_2+\frac{2}{3}e_3=\frac{1}{3}(2e_1-e_2+2e_3)$ et $f(e_3)=\frac{2}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2-\frac{1}{3}e_3=\frac{1}{3}(2e_1+2e_2-e_3)$

Soient $E_{-1}=\{u\in\mathbb{R}^3\,|\,f(u)=-u\}$ et $E_1=\{u\in\mathbb{R}^3\,|\,f(u)=u\}$

1. Montrer que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que e_1-e_2 et e_1-e_3 appartiennent à E_{-1} et que $e_1+e_2+e_3$ appartient à E_1.
3. Que peut-on en déduire sur les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Déterminer $E_{-1}\cap E_1$.
5. A-t-on $E_{-1}\oplus E_1=\mathbb{R}^3$?
6. Calculer $f^2=f\circ f$ et en déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Correction exercice 16.

1. Soient u,u' deux vecteurs de E_{-1}, alors $f(u)=-u$ et $f(u')=-u'$. Soient λ,λ' deux réels.

$$f(\lambda u+\lambda' u')=\lambda f(u)+\lambda' f(u')=\lambda(-u)+\lambda(-u')=-(\lambda u+\lambda' u')$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_{-1},

La troisième montre que $\lambda u+\lambda' u'\in E_{-1}$

$$f(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}=-0_{\mathbb{R}^3}$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, la seconde égalité montre que $0_{\mathbb{R}^3}\in E_{-1}$.

E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient u,u' deux vecteurs de E_1, alors $f(u)=u$ et $f(u')=u'$. Soient λ,λ' deux réels.

$$f(\lambda u+\lambda' u')=\lambda f(u)+\lambda' f(u')=\lambda u+\lambda u'$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_1, La seconde montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_1$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, cela montre aussi que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$.

E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.

$$f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) = -e_1 + e_2 = -(e_1 - e_2)$$

Donc $e_1 - e_2 \in E_{-1}$

$$f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3\right) = -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_3)$$

Donc $e_1 - e_3 \in E_{-1}$

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2 + e_3) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Donc $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$

3. Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille de E_{-1}, donc la dimension de E_1 est supérieur ou égal à 2.
   E_1 a un vecteur non nul, donc sa dimension est supérieur ou égal à 1.
4. Soit $u \in E_{-1} \cap E_1$, $f(u) = -u$ et $f(u) = u$ donc $-u = u$, ce qui signifie que le seul vecteur de $E_{-1} \cap E_1$ est le vecteur nul.

$$E_{-1} \cap E_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

5.

$$\dim(E_{-1} + E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) - \dim(E_{-1} \cap E_1) = \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) \geq 2 + 1 = 3$$

Comme

$$E_{-1} + E_1 \subset \mathbb{R}^3$$

On a

$$\dim(E_{-1} + E_1) \leq 3$$

Finalement

$$\dim(E_{-1} + E_1) = 3$$

Remarque : cela entraine que $\dim(E_{-1}) = 2$ et $\dim(E_1) = 1$

L'intersection de ces sous-espaces vectoriels étant réduit au vecteur nul on a

$$E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$$

6. On peut calculer $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$ pour s'apercevoir que ces vecteurs valent respectivement e_1, e_2 et e_3. Mais c'est long.

Autre méthode

D'après la question précédente $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(Une base de E_{-1} collée à une base de E_1 donne une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$).

Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ s'écrive de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, il suffit de montrer que $f^2(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$, $f^2(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$ et que $f^2(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

En fait il suffit de montrer les égalités ci-dessous

$$f^2(e_1 - e_2) = f\big(f(e_1 - e_2)\big) = f\big(-(e_1 - e_2)\big) = -f(e_1 - e_2) = -\big(-(e_1 - e_2)\big) = e_1 - e_2$$

Car $e_1 - e_2 \in E_{-1}$

$$f^2(e_1 - e_3) = f\big(f(e_1 - e_3)\big) = f\big(-(e_1 - e_3)\big) = -f(e_1 - e_3) = -\big(-(e_1 - e_3)\big) = e_1 - e_3$$

Car $e_1 - e_3 \in E_{-1}$

$$f^2(e_1 + e_2 + e_3) = f\big(f(e_1 + e_2 + e_3)\big) = f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

Car $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$

Par conséquent $f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$

Cela montre que $f^{-1} = f$ et que f est bijective.

Remarque :

Avec les matrices on retrouve ce résultat plus facilement.

Exercice 17.

Soit u une application linéaire de E dans E, E étant un espace vectoriel de dimension n avec n pair.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

(a) $u^2 = O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n = 2\dim\big(Im(u)\big)$

(b) $Im(u) = \ker(u)$

Correction exercice 17.

Supposons (a)

Si $y \in Im(u)$ alors il existe $x \in E$ $y = u(x)$ alors $u(y) = u^2(x) = 0_E$ alors $y \in \ker(u)$

Donc $Im(u) \subset \ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) + \frac{n}{2} = n \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = \frac{n}{2}$$

$Im(u) \subset \ker(u)$ et ces deux espaces ont la même dimension, donc ils sont égaux.

Supposons (b)

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = dimE \Leftrightarrow 2\dim\big(Im(u)\big) = n \Leftrightarrow 2\mathrm{rg(u)} = \mathrm{n}$$

Pour tout $x \in E$, $u(x) \in Im(u)$ donc $u(x) \in \ker(u)$ donc $u\big(u(x)\big) = 0_E$ donc $u^2 = O_E$.

Exercice 18.

Soit $u: E \to E$ une application linéaire et λ un réel.

1. Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$. Calculer $u(x)$ pour $x \in E_\lambda$

Montrer que est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E, montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$

Correction exercice 18.

1. $(u - \lambda id_E)(x) = 0_E \Leftrightarrow u(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow u(x) = \lambda x$

   $u(0_E) = 0_E = \lambda \times 0_E \Rightarrow 0_E \in E_\lambda$

   Soient x_1 et x_2 deux vecteurs de E_λ, on a $\mathrm{u}(x_1) = \lambda x_2$ et $u(x_2) = \lambda x_2$

   Soient α_1 et α_2 deux réels.

   $$u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = \alpha_1 \lambda x_1 + \alpha_2 \lambda x_2 = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

   Donc $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E_\lambda$

   E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
2. F est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F$ par conséquent $u(0_E) = 0_E \in u(F)$

   Pour tout x_1 et x_2 dans F. Pour tout α_1 et α_2 réels. On a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$

   Soient y_1 et y_2 dans $u(F)$, il existe x_1 et x_2 dans F tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$

   Alors

   $$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

   Car u est linéaire, donc

   $$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in u(F)$$

   Car $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$.

   Par conséquent $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Si $x \in E_\lambda$ alors $x = \frac{1}{\lambda}u(x) = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in u(E_\lambda)$ donc $E_\lambda \subset u(E_\lambda)$
   Si $y \in u(E_\lambda)$ il existe $x \in E_\lambda$ tel que $y = u(x)$ donc $y = \lambda x \in E_\lambda$, ce qui montre que $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$
   Finalement
$$u(E_\lambda) = E_\lambda$$

Exercice 19.

Soient f et g deux endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que
$$f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap Im(f)$$

Correction exercice 19.

Soit $y \in f(\ker(g \circ f))$, il existe $x \in \ker(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$
Donc $y \in Im(g)$,
D'autre part $x \in \ker(g \circ f)$ donc $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 0_{\mathbb{R}^n}$, par conséquent $g(y) = g\big(f(x)\big) = 0_{\mathbb{R}^n}$, ce qui montre que $y \in \ker(g)$.
On a donc $y \in \ker(g) \cap Im(f)$, on a montré que
$$f(\ker(g \circ f)) \subset \ker(g) \cap Im(f)$$
Soit $y \in \ker(g) \cap Im(f)$
$y \in Im(f)$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$
$y \in \ker(g)$ donc $g(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$
On en déduit que $0_{\mathbb{R}^n} = g(y) = g\big(f(x)\big)$, ce qui montre que $x \in \ker(g \circ f)$ et comme $y = f(x)$ cela montre que $y \in f(\ker(g \circ f))$.

Exercice 20.

Soit u un endomorphisme de E, un espace vectoriel.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\ker(u) \cap im(u) = \{0_E\}$
(ii) $\ker(u) = \ker(u \circ u)$

Correction exercice 20.

Supposons que $\ker(u) \cap im(u) = \{0_E\}$ et montrons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$
Si $x \in \ker(u)$ alors $u(x) = 0_E$ alors $u\big(u(x)\big) = u(0_E) = 0_E$ alors $x \in \ker(u \circ u)$
Cela montre que $\ker(u) \subset \ker(u \circ u)$
Si $x \in \ker(u \circ u)$ alors $u\big(u(x)\big) = 0_E$, on pose $y = u(x) \in Im(u)$ et comme $u(y) = 0_E$, $y \in \ker(u) \cap im(u)$, d'après (i) $y = 0_E$ et donc $u(x) = 0_E$ ce qui signifie que $x \in \ker(u)$
Cela montre que $\ker(u \circ u) \subset \ker(u)$ et finalement $\ker(u) = \ker(u \circ u)$
Supposons que $\ker(u) = \ker(u \circ u)$ et montrons que $\ker(u) \cap Im(u) = \{0_E\}$
Soit $y \in \ker(u) \cap Im(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0_E$, cela entraine que $u\big(u(x)\big) = 0_E$, autrement dit $x \in \ker(u \circ u)$, d'après (ii) $x \in \ker(u)$ donc $y = u(x) = 0_E$, cela montre bien que
$$\ker(u) \cap im(u) = \{0_E\}$$

Exercice 21.

Pour une matrice $A = \big(a_{i,j}\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On définit la trace de A par :
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, et que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si A et B sont deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

3. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $\operatorname{tr}(A) \neq -1$, déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X + \operatorname{tr}(X)A = B$.
4. Montrer que l'on peut pas trouver $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Correction exercice 21.

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soient λ et μ deux réels
   Comme
$$A = (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$$
   Alors
$$\lambda A + \mu B = \lambda(a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} + \mu(b_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} = (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$$
$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$$
   Donc tr est linéaire.
   Soient A et B deux matrices
$$A = (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} \quad \text{et} \quad B = (b_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$$
   Alors
$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$$
   Donc
$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{l,k} b_{k,l}\right) = \sum_{\substack{l=1\\ k=1}}^{n} a_{l,k} b_{k,l} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} b_{k,l} a_{l,k}\right) = \operatorname{tr}(BA)$$
2. Deux matrices A et B sont semblables s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$ (ou $B = PAP^{-1}$) ce qui revient au même.
$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P^{-1}BP) = \operatorname{tr}(P^{-1}(BP)) = \operatorname{tr}((BP)P^{-1}) = \operatorname{tr}\big(B(PP^{-1})\big) = \operatorname{tr}(BI) = \operatorname{tr}(B)$$
3. Comme tr est linéaire
$$\operatorname{tr}(\operatorname{tr}(X)A) = \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(A)$$
   Donc $X + \operatorname{tr}(X)A = B \Rightarrow \operatorname{tr}(X) + \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) \Rightarrow \operatorname{tr}(X)\big(1 + \operatorname{tr}(A)\big) = \operatorname{tr}(B)$
   Comme $\operatorname{tr}(A) \neq -1$
$$\operatorname{tr}(X) = \frac{\operatorname{tr}(B)}{1 + \operatorname{tr}(A)}$$
   soit $X = (x_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$, $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$
$$X + \operatorname{tr}(X)A = B \Leftrightarrow (x_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} + \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k,k}\right)(a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} = (b_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} \Leftrightarrow \forall i,j$$
$$\in [\![1,n]\!], x_{ij} + \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k,k}\right) a_{i,j} = b_{i,j} \Leftrightarrow \forall i,j \in [\![1,n]\!], x_{ij} + \frac{\operatorname{tr}(B)}{1 + \operatorname{tr}(A)} a_{i,j} = b_{i,j} \Leftrightarrow \forall i,j$$
$$\in [\![1,n]\!], x_{ij} = -\frac{\operatorname{tr}(B)}{1 + \operatorname{tr}(A)} a_{i,j} + b_{i,j}$$
   Il y a une unique solution
4.
$$AB - BA = I_n \Rightarrow \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(I_n) \Rightarrow \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = n \Rightarrow \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = n \Rightarrow 0 = n$$
   Ce qui n'est pas possible.

Exercice 22.

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à deux lignes et deux colonnes.

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\phi(A) = A - {}^tA$$

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de ϕ, c'est-à-dire les matrices telles que $\phi(A) = O$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, quel est sa dimension ?
3. Déterminer l'image de ϕ, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de la forme $\phi(A)$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice J, à déterminer tel que $\phi(A) = \lambda J$.

Correction exercice 22.

1. $\dim\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right) = 2 \times 2 = 4$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \ker(\phi)$
$$\phi(A) = O \Leftrightarrow A - {}^tA = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c$$
Donc
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
La famille de matrices
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ engendre $\ker(\phi)$ et
$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$
Montre que cette famille est libre, elle forme donc une base de $\ker(\phi)$ et $\dim(\ker(\phi)) = 3$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
$$\phi(A) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c - b \\ b - c & 0 \end{pmatrix} = (b - c)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Par conséquent l'image de ϕ est la droite engendrée par la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$Im(\phi)$ étant une droite, toute matrice de cette image est proportionnelle à J.