Feuille 3 Analyse
Formules de Taylor

Exercice 1.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 et $a \in \mathbb{R}$

A l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Exercice 2.

Soit a un réel strictement positif.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle $[0, a]$, avec le reste à l'ordre 5.
2. Montrer que :

$$0 \le \mathrm{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \le \frac{a^5}{5!}\mathrm{sh}(a)$$

3. En déduire que :

$$\frac{433}{384} \le \mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$$

Exercice 3.

Montrer que pour tout $t \in I =]1, +\infty[$:

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1$$

On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange entre 1 et t.

Exercice 4.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in C^3([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $c_1 \in \left]\frac{a+b}{2}, b\right[$ tel que :

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_1)$$

2. Montrer qu'il existe $c_2 \in \left]a, \frac{a+b}{2}\right[$ tel que :

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_2)$$

3. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f'''(c)$$

On utilisera bien sur les questions 1. et 2. et on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f'''.

Exercice 5.

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 6.

1. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left| e^x - \sum_{n=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{n=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$