Feuille 3 Analyse
Formules de Taylor

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 et $a \in \mathbb{R}$.

A l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$

Correction exercice 1.

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a)+(a+h-a)f'(a)+(a+h-a)^2\frac{f''(a)}{2}+o(h^2) \\ &= f(a)+hf'(a)+h^2\frac{f''(a)}{2}+o(h^2) \\ f(a-h) &= f(a)+(a-h-a)f'(a)+(a-h-a)^2\frac{f''(a)}{2}+o(h^2) \\ &= f(a)-hf'(a)+h^2\frac{f''(a)}{2}+o(h^2) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} \\ &= \frac{f(a)+hf'(a)+h^2\frac{f''(a)}{2}+o(h^2)-2f(a)+f(a)-hf'(a)+h^2\frac{f''(a)}{2}+o(h^2)}{h^2} \\ &= \frac{h^2\frac{f''(a)}{2}+h^2\frac{f''(a)}{2}+o(h^2)}{h^2} = \frac{h^2 f''(a)+o(h^2)}{h^2} = \frac{h^2\big(f''(a)+o(1)\big)}{h^2} \\ &= f''(a)+o(1) \xrightarrow[h\to 0]{} f''(a) \end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit a un réel strictement positif.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle $[0, a]$, avec le reste à l'ordre 5.
2. Montrer que
$$0 \le \operatorname{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \le \frac{a^5}{5!}\operatorname{sh}(a)$$
3. En déduire que :
$$\frac{433}{384} \le \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$$

Correction exercice 2.

1. Les dérivées de ch sont

$\operatorname{ch}'(t)=\operatorname{sh}(t)$, $\operatorname{ch}''(t)=\operatorname{ch}(t)$, $\operatorname{ch}^{(3)}(t)=\operatorname{sh}(t)$, $\operatorname{ch}^{(4)}(t)=\operatorname{ch}(t)$ et $\operatorname{ch}^{(5)}(t)=\operatorname{sh}(t)$

ch est une fonction de classe C^5(et même C^∞) sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,a]$. Il existe $c\in]0,a[$ tel que :

$$\operatorname{ch}(a)=\operatorname{ch}(0)+\operatorname{sh}(0)\,a+\operatorname{ch}(0)\frac{a^2}{2!}+\operatorname{sh}(0)\frac{a^3}{3!}+\operatorname{ch}(0)\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5!}\operatorname{sh}(c)=1+\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}+\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(c)$$

2. D'après la question précédente

$$\operatorname{ch}(a)-1-\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{24}=\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(c)$$

Or sh est une fonction croissante sur $[0,a]$, donc $\operatorname{sh}(0)<\operatorname{sh}(c)<\operatorname{sh}(a)$

Donc, puisque $a>0$:

$$\frac{\mathrm{a}^5}{120}\operatorname{sh}(0)<\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(c)<\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(a)\Leftrightarrow 0<\operatorname{ch}(a)-1-\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{24}<\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(a)$$

On a même des inégalités strictes.

3. On prend $a=\frac{1}{2}$.

$$0<\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)-1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}<\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}<\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)<1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{384}=\frac{384+48+1}{384}=\frac{433}{384}$$

Et

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}=\frac{1}{32\times 120}=\frac{1}{3840}$$

De plus

$$\frac{1}{2}<\ln(2)\Rightarrow \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)<\operatorname{sh}(\ln(2))=\frac{e^{\ln(2)}-e^{-\ln(2)}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}<1$$

Donc

$$\frac{433}{384}<\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{433}{384}+\frac{1}{3840}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{433}{384}+\frac{1}{3840}$$

Exercice 3.

Montrer que pour tout $t\in I=]1,+\infty[$,

$$t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1$$

On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange entre 1 et t.

Correction exercice 3.

La formule de Taylor-Lagrange pour la fonction ln entre 1 et $t>1$ dit qu'il existe $c\in]1,t[$ tel que

$$\ln(t)=\ln(1)+(t-1)\ln'(1)+\frac{(t-1)^2}{2}\ln''(c)\Leftrightarrow \ln(t)=t-1-\frac{(t-1)^2}{2c^2}$$

$$1<c<t\Leftrightarrow 1<c^2<t^2\Leftrightarrow \frac{1}{t^2}<\frac{1}{c^2}<1\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{2t^2}<\frac{(t-1)^2}{2c^2}<\frac{(t-1)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(t-1)^2}{2} < -\frac{(t-1)^2}{2c^2} < -\frac{(t-1)^2}{2t^2} \Leftrightarrow t-1-\frac{(t-1)^2}{2} < t-1-\frac{(t-1)^2}{2c^2} < t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}$$
$$\Leftrightarrow t-1-\frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

Comme $t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2} < t-1$, on a bien

$$t-1-\frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t-1$$

Exercice 4.

Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et $f \in C^3([a,b])$.

1. Montrer qu'il existe $c_1 \in \left]\frac{a+b}{2}, b\right[$ tel que :

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_1)$$

2. Montrer qu'il existe $c_2 \in \left]a, \frac{a+b}{2}\right[$ tel que :

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_2)$$

3. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f'''(c)$$

On utilisera bien sur les questions 1. et 2. et on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f'''.

Correction exercice 4.

1.

f est C^2 sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ et C^3 sur $\left]\frac{a+b}{2}, b\right[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(b - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2!} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3!} f'''(c_1)$$
$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_1)$$

2. f est C^2 sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et C^3 sur $\left]a, \frac{a+b}{2}\right[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(a - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2!} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3!} f'''(c_2)$$
$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{a-b}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(a-b)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(a-b)^3}{48} f'''(c_2)$$
$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^3}{48} f'''(c_2)$$

3.

$$f(b)-f(a)=\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_1)\right)$$
$$-\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_2)\right)$$
$$=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}\left(f'''(c_1)+f'''(c_2)\right)$$
$$=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}\times\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}$$

$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}$ est le milieu de $f'''(c_1)$ et de $f'''(c_2)$ donc $\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}$ est compris entre $f'''(c_1)$ et $f'''(c_2)$, autrement dit

Si $f'''(c_1)<f'''(c_2)$
$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}\in\left]f'''(c_1),f'''(c_2)\right[$$
Et si $f'''(c_2)<f'''(c_1)$
$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}\in\left]f'''(c_2),f'''(c_1)\right[$$
Comme f''' est continue sur $[a,b]$ donc sur $[c_1,c_2]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c\in[c_1,c_2]$ tel que
$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}=f'''(c)$$
Par conséquent
$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$$
On n'a pas traité le cas où $f'''(c_1)=f'''(c_2)$, mais dans ce cas $c=c_1$ ou $c=c_2$ convient de manière évidente.

Exercice 5.

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral établir que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:
$$x-\frac{x^3}{6}\le\sin(x)\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

Correction exercice 5.

$\sin$ est indéfiniment dérivable donc on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x.
$$f(x)=\sum_{k=0}^{4}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n f^{(5)}(t)dt$$
$$\sin(0)=0$$
$$\sin'(t)=\cos(t)\Rightarrow\sin'(0)=1$$
$$\sin''(t)=-\sin(t)\Rightarrow\sin''(0)=0$$
$$\sin'''(t)=-\cos(t)\Rightarrow\sin'''(0)=-1$$
$$\sin^{(4)}(t)=\sin(t)\Rightarrow\sin^{(4)}(0)=0$$
$$\sin^{(5)}(t)=\cos(t)$$
Par conséquent
$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\int_0^x\frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,dt$$
$$\forall t\in[0,x],0<\cos(t)<1$$

Donc

$$0 \leq \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t) \leq \frac{(x-t)^4}{4!}$$

Ce qui entraine que

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\,dt = \left[-\frac{(x-t)^5}{5!}\right]_0^x = \frac{x^5}{5!}$$

Puis on rajoute $x-\frac{x^3}{6}$ à chaque terme de ces inégalités

$$x-\frac{x^3}{6} \leq x-\frac{x^3}{6}+\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,dt \leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \Rightarrow x-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

Exercice 6.

1. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|e^x-\sum_{n=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}$$

2. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{n=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = e^x$$

Correction exercice 6.

L'exponentielle est indéfiniment dérivable donc on peut appliquer cette formule

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

Toutes les dérivées de l'exponentielle sont égales à l'exponentielle donc

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt$$

Par conséquent

$$e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt$$

Ce qui entraine que

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| = \left|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt\right|$$

Si $x \geq 0$

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt \leq \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^x dt = \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n dt = \frac{e^x}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=x}$$

$$= \frac{e^x}{n!}\left(-\frac{(x-x)^{n+1}}{n+1}+\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}$$

Si $x < 0$, $x \leq t \leq 0$ donc $x-t < 0$

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| = \left|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt\right| = \left|\frac{1}{n!}\int_x^0 (x-t)^n e^t dt\right| \leq \frac{1}{n!}\int_x^0 |x-t|^n e^t dt = \frac{1}{n!}\int_x^0 (t-x)^n e^t dt$$

$$= \int_x^0 (t-x)^n dt = \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=x}^{t=0} = \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}+\frac{(x-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}e^{|x|}$$

Car $1 \leq e^{|x|}$

Ensuite on montre que pour tout $a > 0$, $u_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

$$u_{n+1} = \frac{a^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{a}{n+2} = u_n \frac{a}{n+2} < u_n$$

Pour n assez grand ($n > a - 2$), ce qui montre que u_n est décroissante (et évidemment positive) donc elle converge vers l, en utilisant l'égalité $u_{n+1} = u_n \frac{a}{n+2}$ en faisant tendre n vers $+\infty$, on a $l = 0$. Cela montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = 0$$

Autrement dit

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$