Université Claude Bernard-Lyon 1 — Semestre de printemps 2019-2020

Fondamentaux des mathématiques 2

Feuille 4 analyse
Intégrales théoriques

Exercice 1.

Soit f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$

Exercice 2.

Prouver l'énoncé suivant :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, (où $a < b$), à valeurs positives, telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est nulle sur $[a, b]$.

Exercice 3.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (où $a < b$).

Montrer que f est de signe constant si et seulement si $\int_a^b |f(t)|dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right|$.

On posera

$$f_+(t) = \max_{t\in[a,b]}(f(t), 0) \qquad \text{et} \qquad f_-(t) = \max_{t\in[a,b]}(-f(t), 0)$$

Exercice 4.

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que, lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, $\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$ tend vers $\frac{1}{2}f(0)$.

Exercice 5.

1. Montrer que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   On coupera l'intégrale entre 0 et α_n et entre α_n et $\frac{\pi}{2}$ avec $\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}$

Exercice 6.

1. Calculer $I = \int_0^1 \ln(1 + t^2)\,dt$
2. On pose, pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = \int_0^1 \sqrt[n]{1 + t^2}dt$$

Calculer la limite de u_n.

3. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, prouver que pour tout $u \geq 0$,

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{1}{2}u^2e^u$$

4. En déduire que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left|\sqrt[n]{1 + t^2} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1 + t^2)\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Puis trouver un équivalent de $u_n - 1$.

Exercice 7.

Soit f de $[0,1]$ vers $[0,1]$ une application continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On suppose que :

$$\int_0^1 f(t)dt = f(1)$$

Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

On pourra utiliser la fonction g définie sur $[0,1]$ par

$$g(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)dt$$

Exercice 8.

On désigne par f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un nombre réel k strictement positif, tel que, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on ait :

$$0 \leq f(x) \leq k \int_0^x f(t)dt$$

1. On définit l'application H de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout x de $\mathbb{R}^+$:

$$H(x) = e^{-kx} \int_0^x f(t)dt$$

   Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $H'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $H(x) = 0$.
   En déduire que f est l'application nulle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

On définit une application f de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln(t)}, \quad \text{si} \quad 0 < t < 1, f(0) = 0, f(1) = 1$$

Et une application F de $]0,1[$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $[0,1]$.
2. Soit x dans l'intervalle $]0,1[$. Quel est le signe de $F(x)$?
3. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
4.
   a) Pour $x \in]0,1[$, montrer que

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)} dt = \ln(2)$$

   b) Pour tout $x \in]0,1[$, montrer que

$$x^2 \ln(2) \leq F(x) \leq x \ln(2)$$

   c) En déduire l'existence et la valeur de la limite

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F(x)$$

5. Montrer que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 (avec $x > 0$).
6.
   a) Montrer que quand ϵ tend vers 0 (avec $0 < \epsilon < 1$)

$$\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f(t)dt \to \int_0^1 f(t)dt$$

b) Déduire de ce qui précède la valeur de

$$\int_0^1 f(t)dt$$

Exercice 10.

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$$

Exercice 11.

Soit F la fonction définie pour tout $x > 1$ par

$$F(x) = \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{\ln(1+t)}$$

1. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $t > 0$:

$$t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$$

2. En déduire que pour tout $x \in \left]1, \sqrt{3}\right[$:

$$\ln(1+x) \le F(x) \le \ln(1+x) + \ln\left(\frac{|x-3|}{|x^2-3|}\right)$$

Puis

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} F(x)$$

3. Calculer, pour tout > 1, $F'(x)$.
4. En déduire que pour tout $x > 1$, $F(x) > \ln(2)$.

Exercice 12.

Soit $I =]1, +\infty[$. On désigne par f l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in I$, par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} dt$$

Première partie

Dans cette partie on ne cherchera pas à exprimer f à l'aide de fonctions usuelles

1. Déterminer le signe de $f(x)$.
2. Justifier la dérivabilité de f sur I, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$, on exprimera $f'(x)$ de la manière la plus simple possible.
3.
   a) Montrer que pour tout $t \in I$,

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1$$

   On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange entre 1 et t.

b) En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Deuxième partie

1. Déterminer une primitive de la fonction $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Exprimer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles de la façon la plus simple possible.

Exercice 13.

Soit F la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sin(t)}$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, puis qu'elle est de classe C^1 sur cet intervalle.
2. Calculer $F'(x)$, en déduire les variations de F sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
3. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $t \in [x,2x] \subset \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (c'est-à-dire pour $x \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right[$).

$$0 < t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t$$

4. En déduire que

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{\sin(t)} < \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}$$

5. Montrer que pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$\ln(2) < F(x) < \ln(2) - \ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right)$$

6. En déduire la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 14.

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur $[0,a]$ telle que $f(0) = 0$.

Soit g une fonction définie sur $[0,a]$ par :

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)$$

1. Montrer que g est dérivable.
2. Calculer g' et en déduire g.

Exercice 15.

Soit $0 < a < 1$. On considère

$$I = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$$

1. Montrer que

$$\int_1^a \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = -\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = \frac{1}{t}$

2. En déduire la valeur de I.

Exercice 16.

Soit $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ F(0) = \ln(2) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, F est dérivable.
2.
   a) A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe $c \in]-t, t[$ tel que :
   $$e^{-t} = 1 - te^{-c}$$
   b) En déduire que pour tout $t \in [-1,1]$, $t \neq 0$.
   $$\frac{1}{e} < \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t} < e$$
   c) Trouver un encadrement de F et en déduire que F est continue en $x = 0$.
3. Pour tout $x \neq 0$, calculer la dérivée F' de F. F est-elle dérivable en 0 ? Que peut-on en déduire sur l'allure du graphe de F ?
4. Etudier les variations de F.
5. Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$, en déduire une majoration de F et sa limite en $+\infty$.
6. En reprenant l'égalité du 2. a), montrer que pour tout $t < 0$, $e^{-t} > 1 - t$ en déduire que pour tout $x < 0$
   $$F(x) > -\ln(2) - x$$

En déduire la limite de F en $-\infty$.

7. Tracer l'allure du graphe de F.

Exercice 17.

Calculer la limite des suites suivantes :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}; \quad \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n^3}} \quad ; \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$$

Exercice 18.

Calculer la limite des suites suivantes :

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}, \quad u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}}$$

Exercice 19.

On cherche la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. Commençons par étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$
   Montrer que la suite (v_n) converge vers une limite à déterminer.
   On pourra utiliser une intégration par parties.
2. Montrer que l'inégalité $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ est vérifiée pour tout $x \geq 0$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$.

$$|u_n - v_n| \leq \frac{1}{6n^2}$$

4. Conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sin(1) - \cos(1)$$