

Feuille 5 Algèbre Fractions rationnelles

Exercice 1.

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{(X+1)(X-2)}; \quad \frac{X}{(X+1)(X-2)}; \quad \frac{2X}{X^2+X+1};$$
$$\frac{X^2}{1+X^2}; \quad \frac{X}{X^2-3X+2}; \quad \frac{X^4}{X^2-3X+2}$$

Les décomposer.

Exercice 2.

Décomposer la fractionnelle suivante en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F(X) = \frac{X-1}{X^2(X^2+1)}$$

Exercice 3.

Décomposer la fractionnelle suivante en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F(X) = \frac{X^4 - X + 2}{(X-1)(X^2-1)}$$

Exercice 4.

Soit

$$F(X) = \frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$$

Décomposer $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 5.

Décomposer en éléments simples, sur \mathbb{C} puis sur \mathbb{R} , les fractions rationnelles suivantes :

- a. $\frac{X}{X^2-1}$
- b. $\frac{X+1}{X^2+1}$
- c. $\frac{X^2}{X^3-1}$

Exercice 6.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ la fraction suivante :

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+1)^2 - X^2}$$

Indication : Noter que F est paire, i.e., $F(X) = F(-X)$

Exercice 7.

Si $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B(0) \neq 0$ et si $m \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ tel que :
 $A = BQ + X^{m+1}R$; et $\deg(Q) \leq m$

Illustrer avec

1. $A = 1 - X, B = 1 + X^2, m = 4.$
2. $A = 1 + X - X^2 + X^3, B = 1 - X, m = 3.$

Exercice 8.

Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes :

$$F(X) = \frac{-X^2 + 2X + 1}{(X - 1)^2(X^2 + 1)}$$

Exercice 9.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

1. Dans $\mathbb{R}(X)$
2. Dans $\mathbb{C}(X)$

Exercice 10. (difficile)

Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction suivante

$$F = \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2}$$