Formes et symboles modulaires mod p

Gabor Wiese

http://homepages.uni-regensburg.de/∼wig03492/

Regensburg (Ratisbonne)

Strasbourg, 10 octobre 2005

Motivation

On aimerait connaître $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$...

Motivation

On aimerait connaître $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$...

C'est difficile ! Mais...

Motivation

On aimerait connaître $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$...

C'est difficile ! Mais...

Chaque forme modulaire $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n$
(propre pour les opérateurs de Hecke et normalisée),
disons de poids k et de niveau N, nous donne une
représentation galoisienne impaire et semi-simple

$$\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$$

t.q. ρ_f et non-ramifiée en dehors de Np
et l'arithmétique de ρ_f est reflétée dans les $\overline{a_l}$ pour chaque
premier $l \nmid Np$ pour une application fixe $\overline{\cdot} : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{F}_p}$.

Motivation

Conjecture de Serre :

Chaque représentation galoisienne impaire, irréductible

$$G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$$

provient d'une forme modulaire comme ci-dessus.

Motivation

Conjecture de Serre :

Chaque représentation galoisienne impaire, irréductible

$$G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$$

provient d'une forme modulaire comme ci-dessus.

Il y a des formules pour le niveau N et le poids k.

Motivation

Conjecture de Serre :

Chaque représentation galoisienne impaire, irréductible

$$G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$$

provient d'une forme modulaire comme ci-dessus.

Il y a des formules pour le niveau N et le poids k.

Si on sait calculer les coefficients $\overline{a_l}$, on sait :

calculer des propriétés des ρ_f et

vérifier la conjecture de Serre.

Motivation

Notons : La représentation ρ_f ne dépend que de la réduction $\overline{a_l}$ des coefficients, c.à.d. de la réduction de la forme modulaire !

Motivation

Notons : La représentation ρ_f ne dépend que de la réduction $\overline{a_l}$ des coefficients, c.à.d. de la réduction de la forme modulaire !

Il y a une théorie en géométrie algébrique de formes modulaires sur le corps $\overline{\mathbb{F}_p}$ (si $p \nmid N$) :
les formes modulaires de Katz.

Motivation

Notons : La représentation ρ_f ne dépend que de la réduction $\overline{a_l}$ des coefficients, c.à.d. de la réduction de la forme modulaire !

Il y a une théorie en géométrie algébrique de formes modulaires sur le corps $\overline{\mathbb{F}_p}$ (si $p \nmid N$) :
les formes modulaires de Katz.

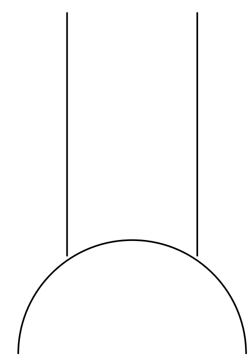
On voudrait faire le calcul des $\overline{a_l}$ directement sur $\mathbb{F}_p$, et pas en caractéristique zéro !

La courbe modulaire $Y(1)$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} = Y(1) \quad \xleftrightarrow{\text{bij.}} \quad \{\text{ Courbes elliptiques / } \mathbb{C}\ \}/\cong$$

$$\tau \quad \mapsto \quad \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$$

Domaine fondamental ($Y(1)$):



La courbe modulaire $Y_1(N)$

$$\Gamma_1(N) := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mod N \}.$$

La courbe modulaire $Y_1(N)$

$$\Gamma_1(N) := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mod N \}.$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1(N)\backslash\mathbb{H} = Y_1(N) & \xleftrightarrow{\text{bij.}} & \{(E/\mathbb{C}, P)\}/\cong \\ \tau & \mapsto & (\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}), 1/N) \end{array}$$

- E courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ et
- $P \in E$ point d'ordre N.

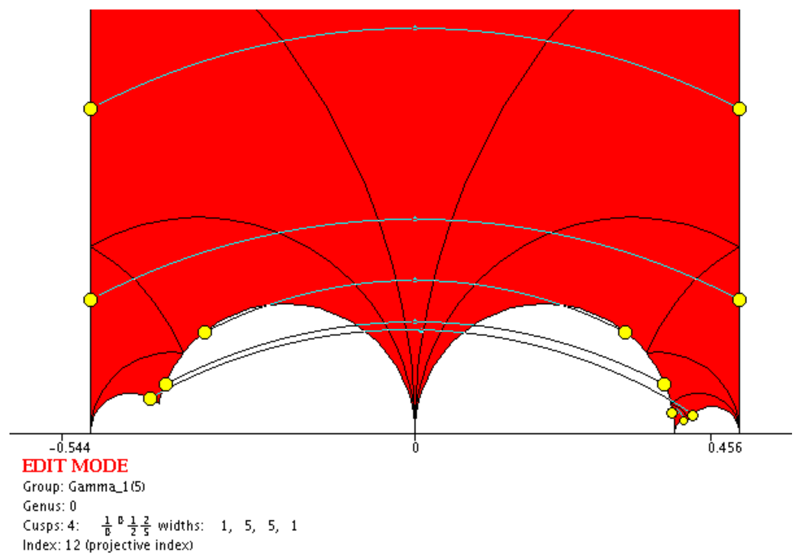
La courbe modulaire $Y_1(N)$

$$\Gamma_1(N) := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mod N \}.$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1(N)\backslash\mathbb{H} = Y_1(N) & \xleftrightarrow{\text{bij.}} & \{(E/\mathbb{C}, P)\}/\cong \\ \tau & \mapsto & (\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}), 1/N) \end{array}$$

- E courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ et
- $P \in E$ point d'ordre N.

Exemple $Y_1(5)$:



Courbes modulaires sur R

Pour $N \geq 5$ il y a une courbe projective et lisse sur $\mathbb{Z}[1/N]$

$$X_1(N)_{\mathbb{Z}[1/N]}$$

avec partie ouverte $Y_1(N)_{\mathbb{Z}[1/N]}$ t.q. $Y_1(N)_{\mathbb{Z}[1/N]}(\mathbb{C})$ est la courbe analytique ci-dessus.

On peut faire des changements de base pour chaque $\mathbb{Z}[1/N]$-algèbre R.

Correspondances de Hecke

T_l pour $Y_1(N)(\mathbb{C})$:

$$
\begin{tikzcd}
 & (E,P,C_l) \in \arrow[dl, mapsto] & Y_{1;0}(N;l) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \ni (E,P,C_l) \arrow[dr, mapsto] & \\
(E,P) \in & Y_1(N) & & Y_1(N) & \ni (E/C_l,\overline{P})
\end{tikzcd}
$$

Correspondances de Hecke

T_l pour $Y_1(N)(\mathbb{C})$:

$$\begin{tikzcd}
(E,P,C_l) \in \arrow[d, mapsto] & Y_{1;0}(N;l) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \ni (E,P,C_l) \arrow[d, mapsto] \\
(E,P) \in Y_1(N) & & Y_1(N) \ni (E/C_l,\overline{P})
\end{tikzcd}$$

Ces correspondances peuvent être définies sur $Y_1(N)_R$.

Correspondances de Hecke

T_l pour $Y_1(N)(\mathbb{C})$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(E,P,C_l) \arrow[d, mapsto] & \in & Y_{1;0}(N;l) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \ni & (E,P,C_l) \arrow[d, mapsto] \\
(E,P) \in & Y_1(N) & & Y_1(N) & \ni (E/C_l,\overline{P})
\end{tikzcd}$$

Ces correspondances peuvent être définies sur $Y_1(N)_R$.

Via l'image réciproque de β, suivie par l'application trace le long de α on obtient des opérateurs de Hecke sur des groupes de cohomologie.

Formes modulaires de Katz sur R

Il existe une courbe elliptique universelle

$$\begin{tikzcd} E_R^{\mathrm{univ}} \arrow[r, "\pi"] & Y_1(N)_R . \arrow[l, bend right, "0"'] \end{tikzcd}$$

Soit $\underline{\omega}_{Y_1(N)_R} = 0^* \underline{\Omega}_{E_R^{\mathrm{univ}}/Y_1(N)_R}$.

On définit l'espace des formes modulaires de Katz (parabolique) $S_k(\Gamma_1(N), R)$ de poids k et de niveau N comme le sous-module de

$$f \in H^0(Y_1(N)_R, \underline{\omega}^{\otimes k}_{E^{\mathrm{univ}}/Y_1(N)_R})$$

dont les q-développements n'ont que des termes positifs (on les obtient à l'aide de la courbe de Tate).

Formes modulaires de Katz sur R

Il existe une courbe elliptique universelle

$$\begin{tikzcd} E_R^{\mathrm{univ}} \arrow[r, "\pi"] & Y_1(N)_R. \arrow[l, bend right, "0"'] \end{tikzcd}$$

Soit $\underline{\omega}_{Y_1(N)_R} = 0^* \underline{\Omega}_{E_R^{\mathrm{univ}}/Y_1(N)_R}$.

On définit l'espace des formes modulaires de Katz (parabolique) $S_k(\Gamma_1(N), R)$ de poids k et de niveau N comme le sous-module de

$$f \in H^0(Y_1(N)_R, \underline{\omega}^{\otimes k}_{E^{\mathrm{univ}}/Y_1(N)_R})$$

dont les q-développements n'ont que des termes positifs (on les obtient à l'aide de la courbe de Tate).

La correspondance de Hecke T_l sur $Y_1(N)_R$ donne l'opérateur de Hecke usuel pour les formes modulaires (c.à.d. même action sur les q-développements).

Formes modulaires de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$

Pour $R = \mathbb{C}$: holomorphe = Katz.

Chaque réduction d'une forme modulaire holomorphe (dont le q-développement standard est dans $\overline{\mathbb{Z}}$) est une forme modulaire de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Formes modulaires de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$

Pour $R = \mathbb{C}$: holomorphe = Katz.

Chaque réduction d'une forme modulaire holomorphe (dont le q-développement standard est dans $\overline{\mathbb{Z}}$) est une forme modulaire de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Pour $\Gamma_1(N)$ avec $N \geq 5$ et poids $k \geq 2$ chaque forme de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ peut être relevée à une forme holomorphe.

Formes modulaires de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$

Pour $R = \mathbb{C}$: holomorphe = Katz.

Chaque réduction d'une forme modulaire holomorphe (dont le q-développement standard est dans $\overline{\mathbb{Z}}$) est une forme modulaire de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Pour $\Gamma_1(N)$ avec $N \geq 5$ et poids $k \geq 2$ chaque forme de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ peut être relevée à une forme holomorphe.

Pour le poids $k = 1$ il y a plus de formes de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ que de formes holomorphes.

Formes modulaires de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$

Pour $R = \mathbb{C}$: holomorphe = Katz.

Chaque réduction d'une forme modulaire holomorphe (dont le q-développement standard est dans $\overline{\mathbb{Z}}$) est une forme modulaire de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Pour $\Gamma_1(N)$ avec $N \geq 5$ et poids $k \geq 2$ chaque forme de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ peut être relevée à une forme holomorphe.

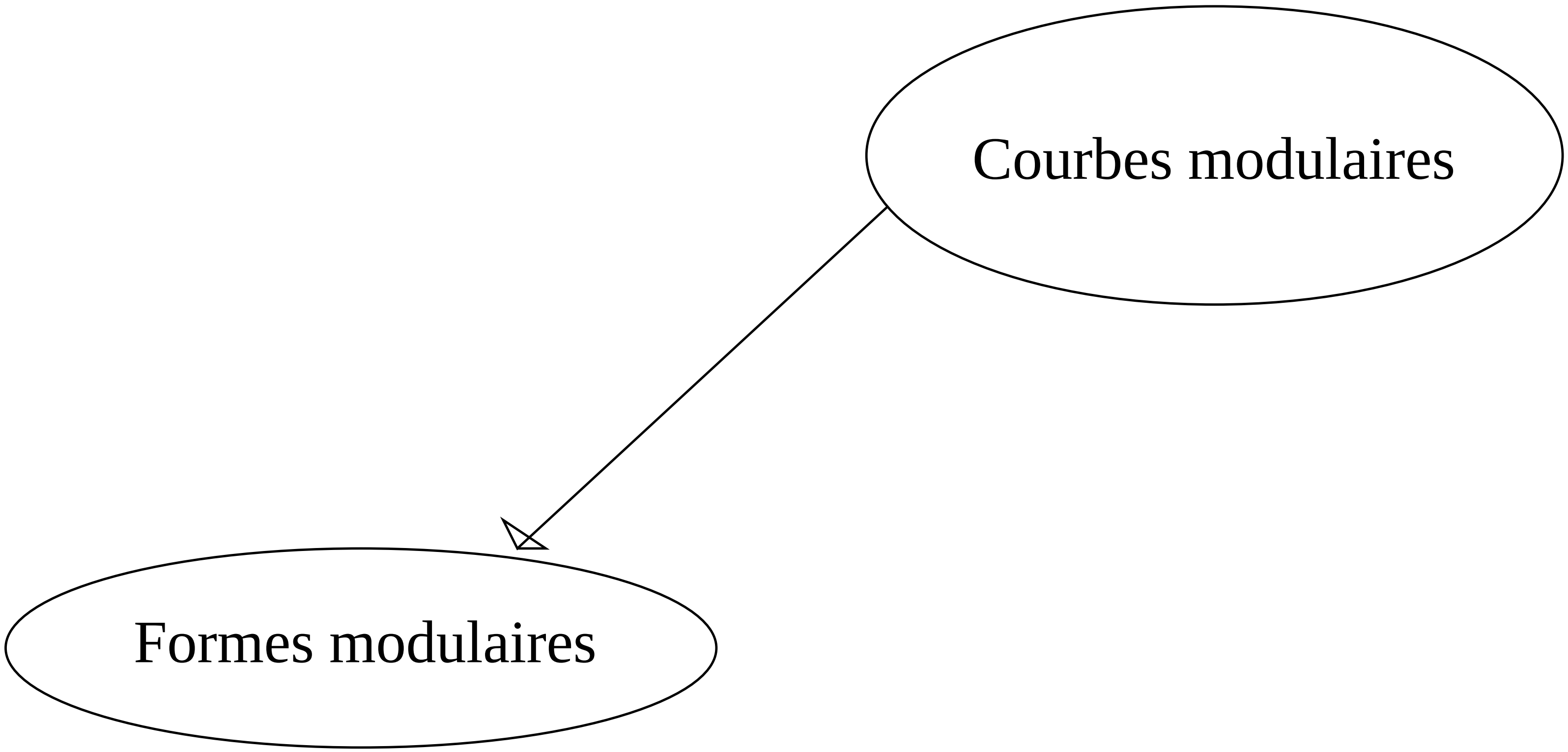
Pour le poids $k = 1$ il y a plus de formes de Katz sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ que de formes holomorphes.

Dans le contexte de la conjecture de Serre les formes de poids 1 sont associées aux représentations qui sont non-ramifiées en p.

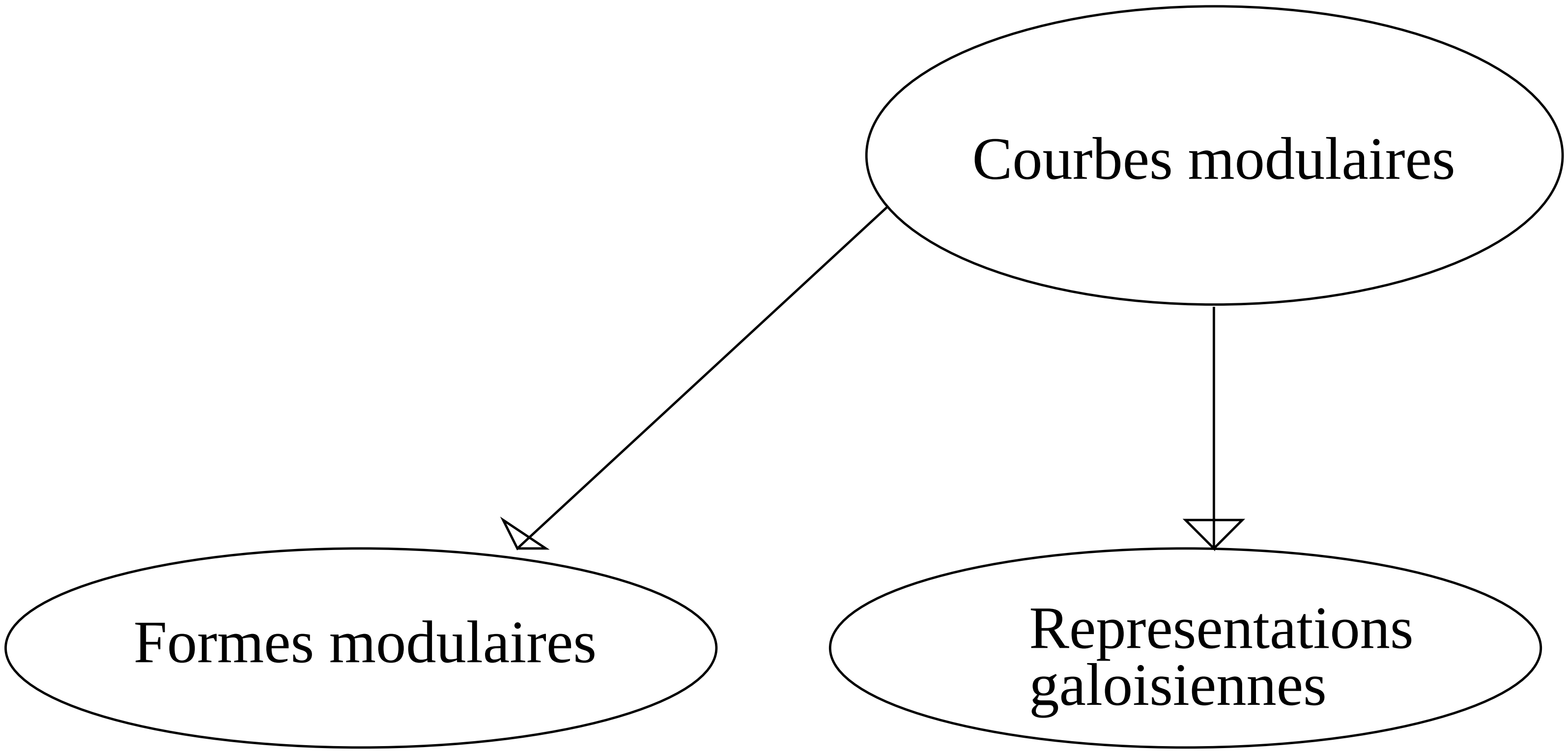
Vue d'ensemble

Courbes modulaires

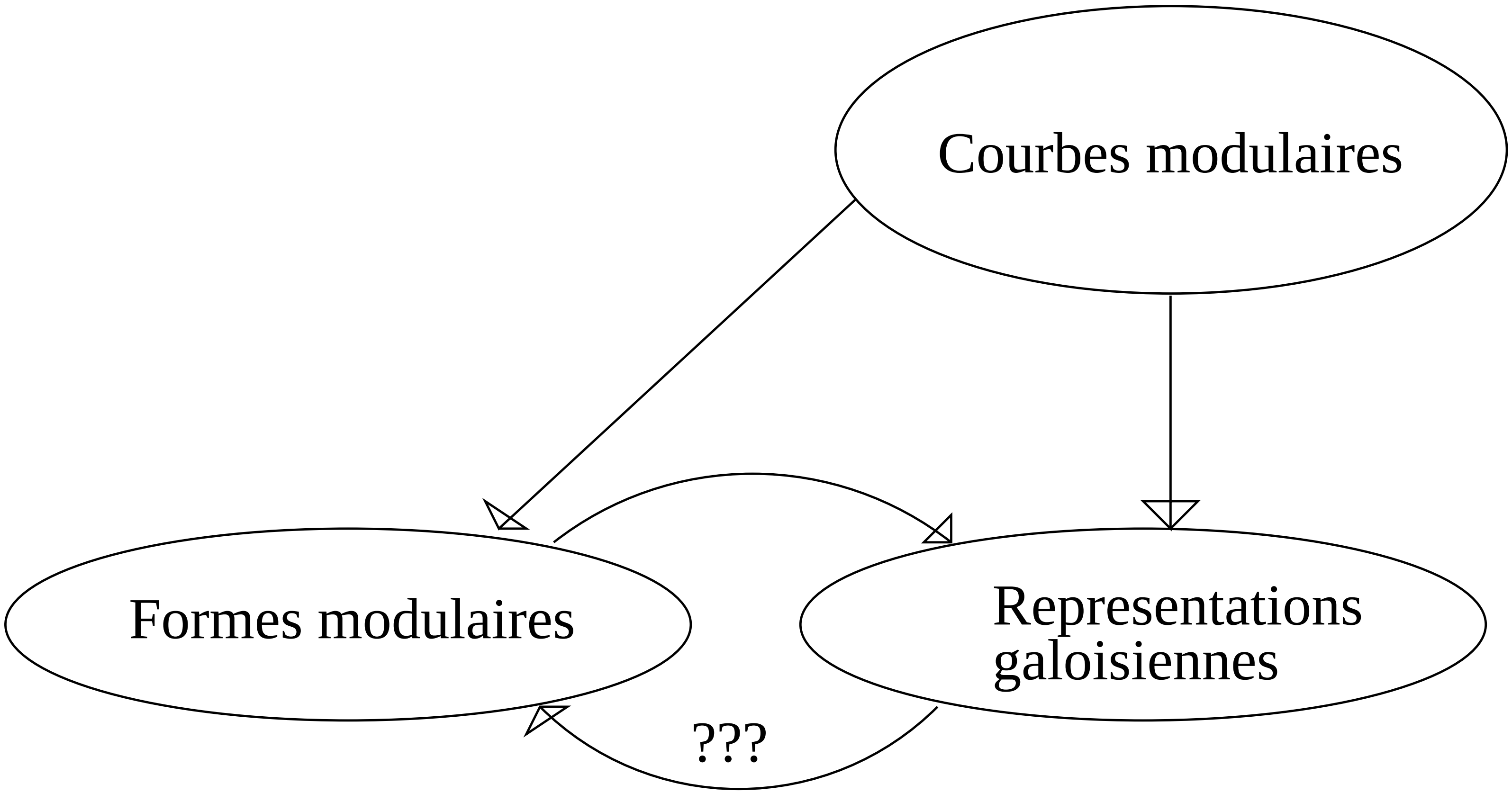
Vue d’ensemble



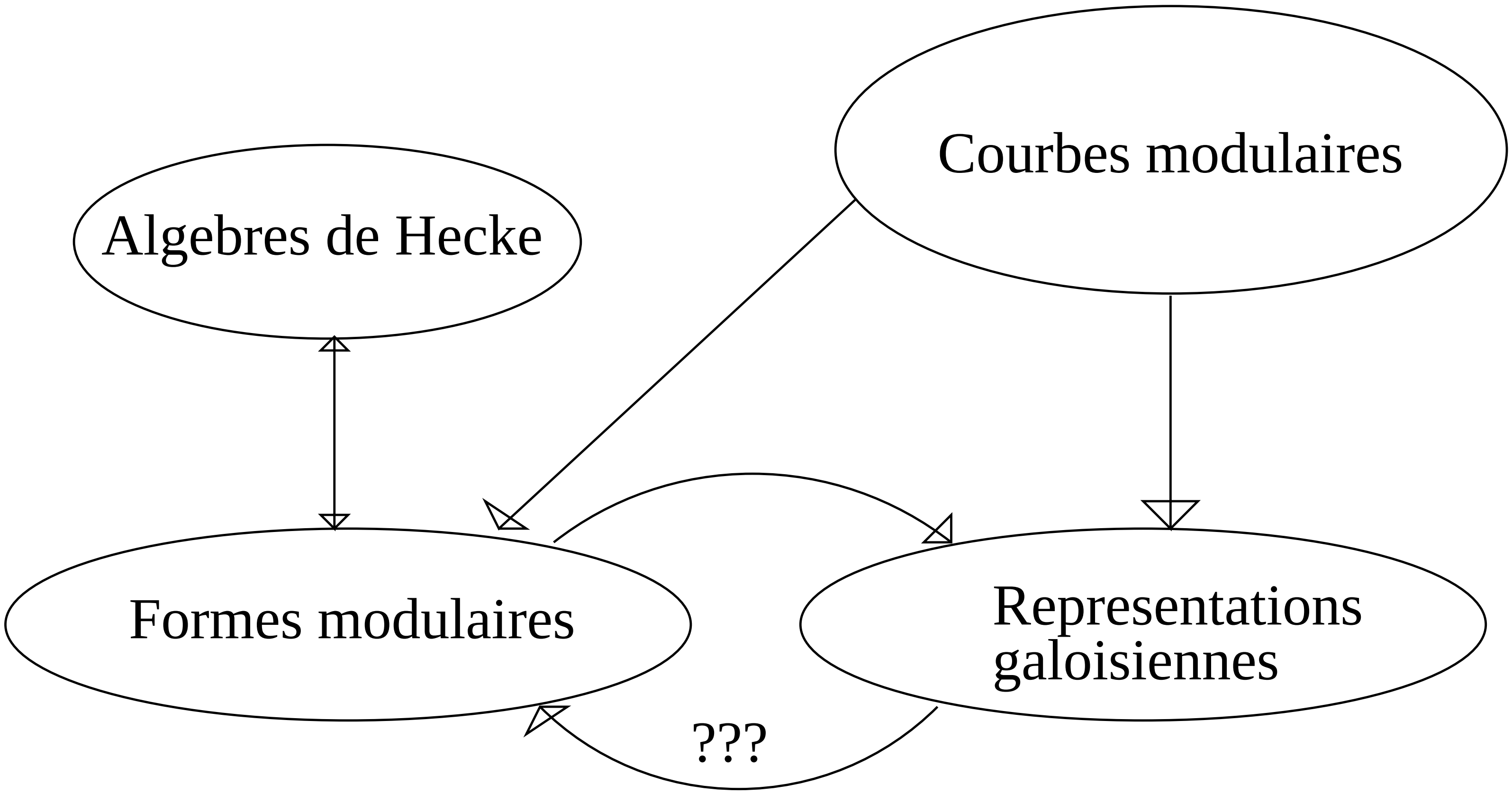
Vue d’ensemble



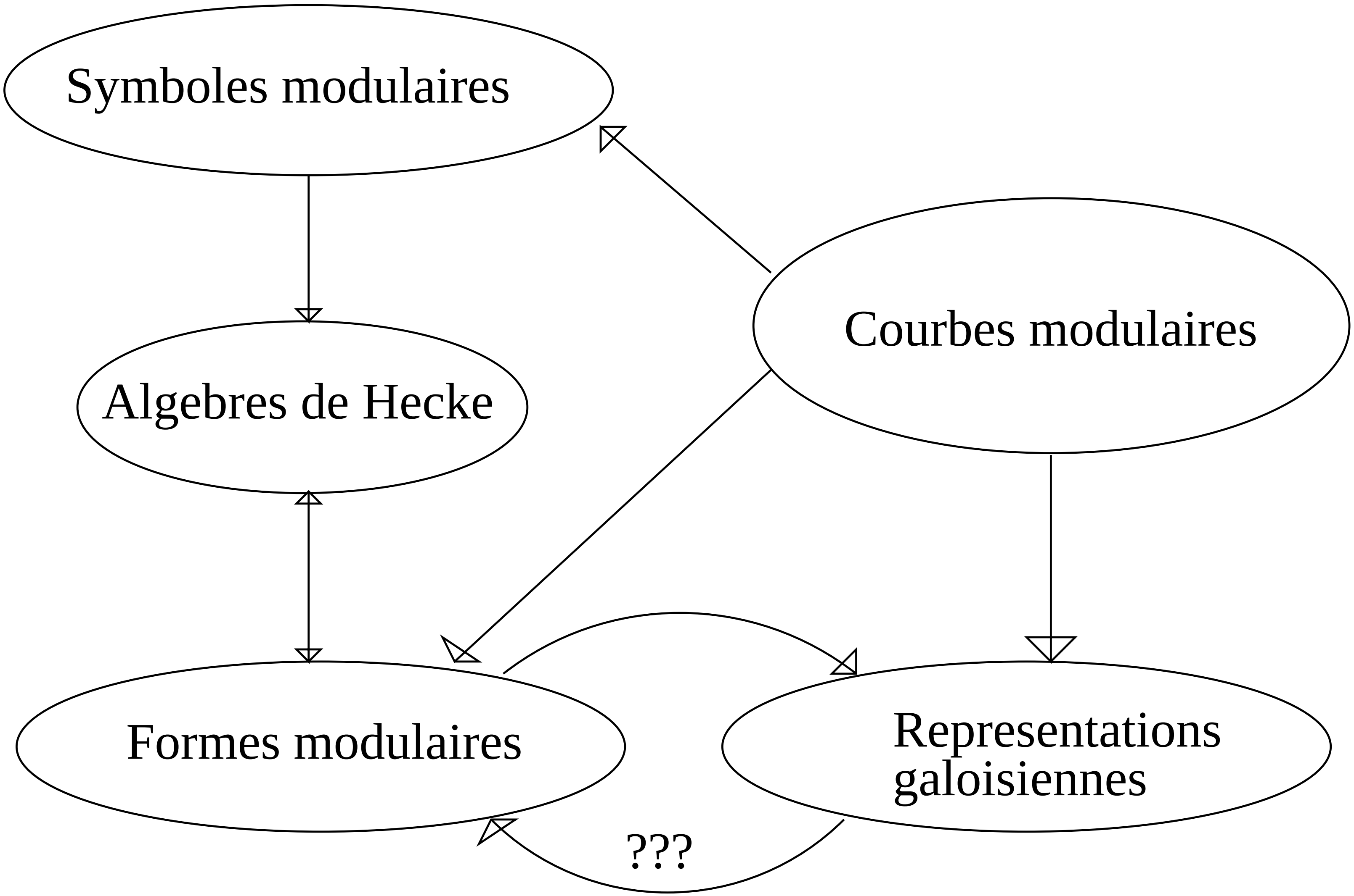
Vue d'ensemble



Vue d'ensemble



Vue d’ensemble



Eichler-Shimura

On dénote par $\mathbb{C}[X,Y]_{k-2}$ les polynômes homogènes de degré $k-2$ (sur $\mathbb{C}$). Ecrivons $\Gamma = \Gamma_1(N)$.

L'isomorphisme d'Eichler-Shimura :

$$\begin{aligned} S_k(\Gamma, \mathbb{C}) \oplus \overline{S_k(\Gamma, \mathbb{C})} &\cong H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{C}[X,Y]_{k-2}) \\ &\cong H^1_{\text{par}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \text{"}\mathbb{C}[X,Y]_{k-2}\text{"}). \end{aligned}$$

Eichler-Shimura

On dénote par $\mathbb{C}[X,Y]_{k-2}$ les polynômes homogènes de degré $k-2$ (sur $\mathbb{C}$). Ecrivons $\Gamma = \Gamma_1(N)$.

L'isomorphisme d'Eichler-Shimura :

$$\begin{aligned} S_k(\Gamma,\mathbb{C}) \oplus \overline{S_k(\Gamma,\mathbb{C})} &\cong H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{C}[X,Y]_{k-2}) \\ &\cong H^1_{\text{par}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \text{"}\mathbb{C}[X,Y]_{k-2}\text{"}). \end{aligned}$$

Les correspondances de Hecke donnent des opérateurs de Hecke sur les deux côtés.

L'isomorphisme d'Eichler-Shimura est compatible avec l'action de Hecke.

Eichler-Shimura

On dénote par $\mathbb{C}[X,Y]_{k-2}$ les polynômes homogènes de degré $k-2$ (sur $\mathbb{C}$). Ecrivons $\Gamma = \Gamma_1(N)$.

L'isomorphisme d'Eichler-Shimura :

$$\begin{aligned} S_k(\Gamma,\mathbb{C}) \oplus \overline{S_k(\Gamma,\mathbb{C})} &\cong H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{C}[X,Y]_{k-2}) \\ &\cong H^1_{\text{par}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \text{"}\mathbb{C}[X,Y]_{k-2}\text{"}). \end{aligned}$$

Les correspondances de Hecke donnent des opérateurs de Hecke sur les deux côtés.

L'isomorphisme d'Eichler-Shimura est compatible avec l'action de Hecke.

En général, Eichler-Shimura est faux avec $\mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p$ au lieu de $\mathbb{C}$.

Cohomologie de groupes

Lemme de Shapiro :

$H^1(\Gamma, V) \cong H^1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), V)).$

Cohomologie de groupes

Lemme de Shapiro :

$H^1(\Gamma, V) \cong H^1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), V))$.

Soient $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

On a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle \sigma \rangle * \langle \tau \rangle$.

Cohomologie de groupes

Lemme de Shapiro :

$H^1(\Gamma, V) \cong H^1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), V)).$

Soient $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

On a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle \sigma \rangle * \langle \tau \rangle$.

Posons $M = \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), V)$.

La suite exacte de Mayer-Vietoris donne :

$$0 \to M^{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} \to M^{\langle \sigma \rangle} \oplus M^{\langle \tau \rangle} \to M \to H^1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), M) \to 0.$$

Symboles modulaires

Alors,

$$H^1(\Gamma, R[X,Y]_{k-2}) \cong M/\big(M^{\langle\sigma\rangle} + M^{\langle\tau\rangle}\big).$$

On a $M = R[\Gamma\backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})] \otimes_R R[X,Y]_{k-2}$.

Symboles modulaires

Alors,

$$H^1(\Gamma, R[X,Y]_{k-2}) \cong M/\big(M^{\langle\sigma\rangle} + M^{\langle\tau\rangle}\big).$$

On a $M = R[\Gamma\backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})] \otimes_R R[X,Y]_{k-2}$.

On appelle ce module le module des symboles modulaires (en présentation de Manin) de poids k et de niveau N sur l'anneau R.

$H^1_{\text{par}}(\Gamma, R[X,Y]_{k-2})$ correspond à un certain sous-espace : le noyeau de l'application de bord.

L'algèbre de Hecke

Soit $\mathbb{T}_R$ l'algèbre de Hecke sur $S_k(\Gamma, R)$,
c.à.d. $R[T_1, T_2, \dots] \subset \mathrm{End}(S_k(\Gamma, R))$.

L'algèbre de Hecke

Soit $\mathbb{T}_R$ l'algèbre de Hecke sur $S_k(\Gamma, R)$,
c.à.d. $R[T_1, T_2, \ldots] \subset \mathrm{End}(S_k(\Gamma, R))$.

Eichler-Shimura : $S_k(\Gamma, \mathbb{C}) \oplus \overline{S_k(\Gamma, \mathbb{C})} \cong H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{C}[X, Y]_{k-2})$.

(a) $H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{C}[X, Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-module fidèle.

L'algèbre de Hecke

Soit $\mathbb{T}_R$ l'algèbre de Hecke sur $S_k(\Gamma, R)$,
c.à.d. $R[T_1, T_2, \ldots] \subset \mathrm{End}(S_k(\Gamma, R))$.

Eichler-Shimura : $S_k(\Gamma, \mathbb{C}) \oplus \overline{S_k(\Gamma, \mathbb{C})} \cong H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{C}[X, Y]_{k-2})$.

(a) $H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{C}[X, Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-module fidèle.

(b) $H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{C}[X, Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-module libre de rang 2.

Calcul des formes modulaires

Si

(a) $H^1_{\text{par}}(\Gamma, R[X,Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_R$-module fidèle et

(b) l'homomorphisme
$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{T}_R, R) \to S_k(\Gamma_1(N), R), \quad f \mapsto \sum_{n\geq 1} f(T_n)q^n$
est un isomorphisme (formes modulaires holomorphes, de Katz si N inversible dans R), c.à.d. que les q-développements caractérisent les formes modulaires,

alors le calcul de $S_k(\Gamma_1(N), R)$ se fait en n'utilisant que de l'algèbre linéaire sur R.

Calcul des formes modulaires

Si

(a) $H^1_{\text{par}}(\Gamma, R[X,Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_R$-module fidèle et

(b) l'homomorphisme
$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{T}_R, R) \to S_k(\Gamma_1(N), R), \quad f \mapsto \sum_{n \geq 1} f(T_n) q^n$
est un isomorphisme (formes modulaires holomorphes, de Katz si N inversible dans R), c.à.d. que les q-développements caractérisent les formes modulaires,

alors le calcul de $S_k(\Gamma_1(N), R)$ se fait en n'utilisant que de l'algèbre linéaire sur R.

En fait, $\mathbb{T}_R$ est déterminé par les opérateurs $T_1, \ldots, T_B$ avec B la borne de Sturm : $B = N^2 \frac{k}{24} \prod_{l|N}(1 - \frac{1}{l^2})$.

Questions

(a) Est-ce que $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}$-module fidèle?

(b) Est-ce que $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}$-module libre de rang 2?

Questions

(a) Est-ce que $H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}$-module fidèle?

(b) Est-ce que $H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}$-module libre de rang 2?

- (b) implique (a).
- (b) est vrai localement aux formes modulaires p-ordinaires et p-distinguées (Wiles, Hida, Emerton, Pollack, Weston).
- (b) est vrai si $k \leq p-1$ via la théorie de Hodge p-adique (Faltings, Fontaine, Messing, Edixhoven).
- (a) est vrai pour $p = 2$ et $k \leq p+1 = 3$ (Edixhoven).

Questions

(a) Est-ce que $H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}$-module fidèle?

(b) Est-ce que $H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}$-module libre de rang 2?

- (a) et (b) sont faux en général pour les formes modulaires non-ordinaires de poids $k \geq p+2$.
- Pas de contre-exemple à (a) connu pour les formes modulaires avec $2 \leq k \leq p+1$.

Questions

(a) Est-ce que $H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}$-module fidèle?

(b) Est-ce que $H^1_{\text{par}}(\Gamma, \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2})$ est un $\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}$-module libre de rang 2?

- (a) et (b) sont faux en général pour les formes modulaires non-ordinaires de poids $k \geq p+2$.
- Pas de contre-exemple à (a) connu pour les formes modulaires avec $2 \leq k \leq p+1$.

Théorème: (a) est vrai pour les formes modulaires ordinaires si $2 \leq k \leq p+1$.

Formes modulaires de poids 1

Corollaire: Les formes modulaires de poids un sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ peuvent être calculées via les symboles modulaires sur $\mathbb{F}_p$ de poids p et de niveau N.

Formes modulaires de poids 1

Corollaire: Les formes modulaires de poids un sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ peuvent être calculées via les symboles modulaires sur $\mathbb{F}_p$ de poids p et de niveau N.

Evidemment, Eichler-Shimura ne s'applique que pour $k \geq 2$ directement.

Formes modulaires de poids 1

Corollaire: Les formes modulaires de poids un sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ peuvent être calculées via les symboles modulaires sur $\mathbb{F}_p$ de poids p et de niveau N.

Evidemment, Eichler-Shimura ne s'applique que pour $k \geq 2$ directement.

Frobenius : $S_1(\Gamma_1(N), \overline{\mathbb{F}_p}) \hookrightarrow S_p(\Gamma_1(N), \overline{\mathbb{F}_p})$

L'image de Frobenius, c'est les formes $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n$ de poids p t.q. $a_n = 0$ si $p \nmid n$.

L'idée du théorème

Le poids $3 \leq k \leq p$ pour le niveau N (pour $p \nmid N$) est en rapport avec le poids 2 pour le niveau Np.

L'idée du théorème

Le poids $3 \leq k \leq p$ pour le niveau N (pour $p \nmid N$) est en rapport avec le poids 2 pour le niveau Np.

Par exemple, soit $f \in S_2(Np, \epsilon_N \chi_p^{k-2}, \overline{\mathbb{Z}})$ une forme propre.

Ici, χ_p c'est le caractère cyclotomique et $\epsilon_N : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \overline{\mathbb{Z}}^*$. On a :

- $\langle x \rangle_N f = \epsilon_N(x) f$ resp.
- $\langle x \rangle_p f = \chi_p^{k-2}(x) f$.

L'idée du théorème

Le poids $3 \leq k \leq p$ pour le niveau N (pour $p \nmid N$) est en rapport avec le poids 2 pour le niveau Np.

Par exemple, soit $f \in S_2(Np, \epsilon_N \chi_p^{k-2}, \overline{\mathbb{Z}})$ une forme propre.

Ici, χ_p c'est le caractère cyclotomique et $\epsilon_N : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \overline{\mathbb{Z}}^*$. On a :

- $\langle x \rangle_N f = \epsilon_N(x) f$ resp.
- $\langle x \rangle_p f = \chi_p^{k-2}(x) f$.

Alors, ρ_f a le déterminant $\epsilon_N \chi_p^{k-2} \chi_p = \epsilon_N \chi_p^{k-1}$,

L'idée du théorème

Le poids $3 \leq k \leq p$ pour le niveau N (pour $p \nmid N$) est en rapport avec le poids 2 pour le niveau Np.

Par exemple, soit $f \in S_2(Np, \epsilon_N \chi_p^{k-2}, \overline{\mathbb{Z}})$ une forme propre.

Ici, χ_p c'est le caractère cyclotomique et $\epsilon_N : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \overline{\mathbb{Z}}^*$.
On a :

- $\langle x \rangle_N f = \epsilon_N(x) f$ resp.
- $\langle x \rangle_p f = \chi_p^{k-2}(x) f$.

Alors, ρ_f a le déterminant $\epsilon_N \chi_p^{k-2} \chi_p = \epsilon_N \chi_p^{k-1}$,
le même qu'ont les représentations galoisiennes pour le poids k et le niveau N sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Niveau Np

Problèmes:

- $X_1(Np)$ n'est lisse et projective que sur $\mathbb{Z}[1/Np]$. Changement de base vers $\mathbb{F}_p$ est impossible.

Niveau Np

Problèmes:

- $X_1(Np)$ n'est lisse et projective que sur $\mathbb{Z}[1/Np]$. Changement de base vers $\mathbb{F}_p$ est impossible.
- Il n'y a pas de "bonne" théorie de formes modulaires sur $\mathbb{F}_p$ en niveau Np.

  En particulier,
  $$\{f \in S_2(Np, \mathbb{C}) \mid q-\text{développement dans } \overline{\mathbb{Z}}\} \otimes \overline{\mathbb{Z}_p}$$
  n'est pas bien : cela n'est pas invariant sous w_p.

Niveau Np

Problèmes:

- $X_1(Np)$ n'est lisse et projective que sur $\mathbb{Z}[1/Np]$. Changement de base vers $\mathbb{F}_p$ est impossible.
- Il n'y a pas de "bonne" théorie de formes modulaires sur $\mathbb{F}_p$ en niveau Np.

  En particulier,

  $$\{f \in S_2(Np,\mathbb{C}) \mid q-\text{développement dans } \overline{\mathbb{Z}}\} \otimes \overline{\mathbb{Z}_p}$$

  n'est pas bien : cela n'est pas invariant sous w_p.
- Une différente structure intégrale est nécessaire !

Niveau Np - géométrie mod p

Solution: (Deligne-Rapoport, Katz-Mazur, Gross)

Soient $K := \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$.

$X_1(Np)$ a un modèle régulier et stable $X_{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$:

Niveau Np - géométrie mod p

Solution: (Deligne-Rapoport, Katz-Mazur, Gross)

Soient $K := \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$.

$X_1(Np)$ a un modèle régulier et stable $X_{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$:

- $X_K = X_1(Np)_K$
- $X_{\mathbb{F}_p}$ se compose de deux courbes lisses (les courbes d'Igusa $I_1(N)$ et $E_1(N)$) qui se coupent transversalement dans les points supersinguliers.

Niveau Np - géométrie mod p

Solution: (Deligne-Rapoport, Katz-Mazur, Gross)

Soient $K := \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$.

$X_1(Np)$ a un modèle régulier et stable $X_{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$:

- $X_K = X_1(Np)_K$
- $X_{\mathbb{F}_p}$ se compose de deux courbes lisses (les courbes d'Igusa $I_1(N)$ et $E_1(N)$) qui se coupent transversalement dans les points supersinguliers.

Soit $\Omega_{X/\mathcal{O}}$ le faisceau des formes différentielles régulières : c'est le faisceau dualisant de $X \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$; il est inversible.

Niveau Np - géométrie mod p

Solution: (Deligne-Rapoport, Katz-Mazur, Gross)

Soient $K := \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}_p[\zeta_p]$.

$X_1(Np)$ a un modèle régulier et stable $X_{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$:

- $X_K = X_1(Np)_K$
- $X_{\mathbb{F}_p}$ se compose de deux courbes lisses (les courbes d'Igusa $I_1(N)$ et $E_1(N)$) qui se coupent transversalement dans les points supersinguliers.

Soit $\Omega_{X/\mathcal{O}}$ le faisceau des formes différentielles régulières : c'est le faisceau dualisant de $X \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$; il est inversible.

La structure intégrale désirée, c'est $L := H^0(X_{\mathcal{O}}, \Omega_{X/\mathcal{O}})$.
On a : $\overline{L} = L \otimes \mathbb{F}_p = H^0(X_{\mathbb{F}_p}, \Omega_{X_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p})$.

Niveau Np - géométrie mod p

Notations:

- $(\cdot)(k-2)$ c'est le sous-espace sur lequel $\langle l \rangle_p$ agit comme $\chi_p^{k-2}(l) = l^{k-2}$.
- $(\cdot)[k-2]$ signifie que T_l agit comme $l^{k-2}T_l$.

Théorème (Serre): Pour $3 \le k \le p$ on a :

$$\overline{L}(k-2) \cong S_k(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p) \oplus S_{p+3-k}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p)[k-2].$$

Niveau Np - géométrie mod p

Notations:

- $(\cdot)(k-2)$ c'est le sous-espace sur lequel $\langle l \rangle_p$ agit comme $\chi_p^{k-2}(l) = l^{k-2}$.
- $(\cdot)[k-2]$ signifie que T_l agit comme $l^{k-2}T_l$.

Théorème (Serre): Pour $3 \leq k \leq p$ on a :

$$\overline{L}(k-2) \cong S_k(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p) \oplus S_{p+3-k}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p)[k-2].$$

On a deux q-développements ; un sur chaque composante de $X_{\mathbb{F}_p}$.

Niveau Np - géométrie mod p

Notations:

- $(\cdot)(k-2)$ c'est le sous-espace sur lequel $\langle l \rangle_p$ agit comme $\chi_p^{k-2}(l) = l^{k-2}$.
- $(\cdot)[k-2]$ signifie que T_l agit comme $l^{k-2}T_l$.

Théorème (Serre): Pour $3 \leq k \leq p$ on a :

$$\overline{L}(k-2) \cong S_k(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p) \oplus S_{p+3-k}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p)[k-2].$$

On a deux q-développements ; un sur chaque composante de $X_{\mathbb{F}_p}$.

On perd la dualité avec l'algèbre de Hecke !

Niveau Np - géométrie complexe

On a vu : $\overline{L}(k-2)$.

Question : $H^1(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p)(k-2) =$?

Niveau Np - géométrie complexe

On a vu : $\overline{L}(k-2)$.

Question : $H^1(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p)(k-2) =$?

Le lemme de Shapiro implique :

$H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p) \cong H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(Np)}(\mathbb{F}_p[\Gamma_1(N)], \mathbb{F}_p)).$

Niveau Np - géométrie complexe

On a vu : $\overline{L}(k-2)$.

Question : $H^1(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p)(k-2) = $?

Le lemme de Shapiro implique :

$H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p) \cong H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(Np)}(\mathbb{F}_p[\Gamma_1(N)], \mathbb{F}_p))$.

Les $\mathbb{F}_p[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)]$-modules simples sont $\mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2}$ pour $2 \leq k \leq p+1$.

Question : Décomposition de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(Np)}(\mathbb{F}_p[\Gamma_1(N)], \mathbb{F}_p)$ en $\mathbb{F}_p[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)]$-modules simples ?

Niveau Np - géométrie complexe

Via l'évaluation des polynômes on obtient

$$\mathcal{I} := \{P \in \mathbb{F}_p[X,Y]/(X^p - X, Y^p - Y) \mid f((0,0)) = 0\}$$

$$\xleftrightarrow{\text{bij.}} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(Np)}(\mathbb{F}_p[\Gamma_1(N)], \mathbb{F}_p).$$

Niveau Np - géométrie complexe

Via l'évaluation des polynômes on obtient

$$\mathcal{I} := \{P \in \mathbb{F}_p[X,Y]/(X^p - X, Y^p - Y) \mid f((0,0)) = 0\}$$
$$\xleftrightarrow{\text{bij.}} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(Np)}(\mathbb{F}_p[\Gamma_1(N)], \mathbb{F}_p).$$

$\langle l \rangle_p$ sur $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathcal{I})$ par $\mathcal{I} \to \mathcal{I}, f \mapsto \big((u,v) \mapsto f(lu, lv)\big)$.

Niveau Np - géométrie complexe

Via l'évaluation des polynômes on obtient

$$\mathcal{I} := \{P \in \mathbb{F}_p[X,Y]/(X^p - X, Y^p - Y) \mid f((0,0)) = 0\}$$
$$\stackrel{\text{bij.}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(Np)}(\mathbb{F}_p[\Gamma_1(N)], \mathbb{F}_p).$$

$\langle l \rangle_p$ sur $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathcal{I})$ par $\mathcal{I} \to \mathcal{I}, f \mapsto \big((u,v) \mapsto f(lu, lv)\big)$.

On a $\mathcal{I} = \bigoplus_{d=0}^{p-2} U_d$ avec $U_d = \{f \in \mathcal{I} \mid f(lx) = l^d f(x)\}$.

Niveau Np - géométrie complexe

Via l'évaluation des polynômes on obtient

$$\mathcal{I} := \{P \in \mathbb{F}_p[X,Y]/(X^p - X, Y^p - Y) \mid f((0,0)) = 0\}$$
$$\xleftrightarrow{\text{bij.}} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(Np)}(\mathbb{F}_p[\Gamma_1(N)], \mathbb{F}_p).$$

$\langle l \rangle_p$ sur $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathcal{I})$ par $\mathcal{I} \to \mathcal{I}, f \mapsto \big((u,v) \mapsto f(lu, lv)\big)$.

On a $\mathcal{I} = \bigoplus_{d=0}^{p-2} U_d$ avec $U_d = \{f \in \mathcal{I} \mid f(lx) = l^d f(x)\}$.

Accouplement parfait

$$\mathcal{I} \times \mathcal{I} \to \mathbb{F}_p, (f,g) \mapsto \sum_{(a,b)\in\mathbb{F}_p^2} f((a,b))g((a,b)).$$

Niveau Np - géométrie complexe

Via l'évaluation des polynômes on obtient

$$\mathcal{I} := \{P \in \mathbb{F}_p[X,Y]/(X^p - X, Y^p - Y) \mid f((0,0)) = 0\}$$
$$\stackrel{\text{bij.}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(Np)}(\mathbb{F}_p[\Gamma_1(N)], \mathbb{F}_p).$$

$\langle l \rangle_p$ sur $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathcal{I})$ par $\mathcal{I} \to \mathcal{I}, f \mapsto \big((u,v) \mapsto f(lu, lv)\big)$.

On a $\mathcal{I} = \bigoplus_{d=0}^{p-2} U_d$ avec $U_d = \{f \in \mathcal{I} \mid f(lx) = l^d f(x)\}$.

Accouplement parfait

$$\mathcal{I} \times \mathcal{I} \to \mathbb{F}_p, (f,g) \mapsto \sum_{(a,b)\in\mathbb{F}_p^2} f((a,b))g((a,b)).$$

On obtient un accouplement parfait $U_{k-2} \times U_{(p+3-k)-2} \to \mathbb{F}_p$.

Pour celui-ci $\mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2}$ et $\mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2}$ sont des compléments orthogonaux.

Niveau Np - géométrie complexe

On obtient la suite exacte

$$\mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2} \hookrightarrow U_{k-2} \twoheadrightarrow \left(\mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2}\right)^{\vee}.$$

Niveau Np - géométrie complexe

On obtient la suite exacte

$$\mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2} \hookrightarrow U_{k-2} \twoheadrightarrow (\mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2})^\vee.$$

On a $\mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2} \cong (\mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2})^\vee$.

Niveau Np - géométrie complexe

On obtient la suite exacte

$$\mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2} \hookrightarrow U_{k-2} \twoheadrightarrow (\mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2})^\vee.$$

On a $\mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2} \cong (\mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2})^\vee$.

Proposition (cp. Ash-Stevens): On a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to \quad & H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2}) \\ \to \quad & H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p)(k-2) \\ \to \quad & H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2})[k-2] \to 0 \end{aligned}$$

de modules de Hecke.

Niveau Np - géométrie complexe

On obtient la suite exacte

$$\mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2} \hookrightarrow U_{k-2} \twoheadrightarrow (\mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2})^\vee.$$

On a $\mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2} \cong (\mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2})^\vee$.

Proposition (cp. Ash-Stevens): On a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to \quad & H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2}) \\ \to \quad & H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p)(k-2) \\ \to \quad & H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2})[k-2] \to 0 \end{aligned}$$

de modules de Hecke.

Cette suite n'est pas scindée en général.

Niveau Np - géométrie complexe

Proposition: On a : $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p) \cong J_1(Np)(\mathbb{C})[p]$.

Niveau Np - géométrie complexe

Proposition: On a : $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p) \cong J_1(Np)(\mathbb{C})[p]$.

Suite exacte de Kummer de faisceaux (analytiques) sur $X_1(Np)(\mathbb{C})$:

$$0 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{p} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0.$$

Niveau Np - géométrie complexe

Proposition: On a : $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p) \cong J_1(Np)(\mathbb{C})[p]$.

Suite exacte de Kummer de faisceaux (analytiques) sur $X_1(Np)(\mathbb{C})$:

$$0 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{p} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0.$$

Suite exacte longue :

$$0 \to H^1(X_1(Np)(\mathbb{C}), \mu_p)$$
$$\to H^1(X_1(Np)(\mathbb{C}), \mathbb{G}_m) \xrightarrow{p} H^1(X_1(Np)(\mathbb{C}), \mathbb{G}_m).$$

Niveau Np - géométrie complexe

Proposition: On a : $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p) \cong J_1(Np)(\mathbb{C})[p]$.

Suite exacte de Kummer de faisceaux (analytiques) sur $X_1(Np)(\mathbb{C})$:

$$0 \to \mu_p \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{p} \mathbb{G}_m \to 0.$$

Suite exacte longue :

$$0 \to H^1(X_1(Np)(\mathbb{C}), \mu_p)$$
$$\to H^1(X_1(Np)(\mathbb{C}), \mathbb{G}_m) \xrightarrow{p} H^1(X_1(Np)(\mathbb{C}), \mathbb{G}_m).$$

On a $H^1(X_1(Np)(\mathbb{C}), \mu_p) = H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p)$ et $J_1(Np)(\mathbb{C}) \cong H^1(X_1(Np)(\mathbb{C}), \mathbb{G}_m)$.

Géométrie complexe $\to$ géométrie mod p

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}(\overline{L}(k-2)) := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(\overline{L}(k-2))$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\mathsf{par},2,Np} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(H^1_{\mathsf{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p))$$

Géométrie complexe → géométrie mod p

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}(\overline{L}(k-2)) := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(\overline{L}(k-2))$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},2,Np} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p))$$

Soit T dans la $\mathbb{F}_p$-algèbre de Hecke pour $S_2(\Gamma_1(Np), \mathbb{C})$.

- Si T est zéro sur $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p)(k-2)$.

Géométrie complexe $\to$ géométrie mod p

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}(\overline{L}(k-2)) := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(\overline{L}(k-2))$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},2,Np} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p))$$

Soit T dans la $\mathbb{F}_p$-algèbre de Hecke pour $S_2(\Gamma_1(Np), \mathbb{C})$.

- Si T est zéro sur $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p)(k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $J_1(Np)(\mathbb{C})[p](k-2)$.

Géométrie complexe $\rightarrow$ géométrie mod p

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}(\overline{L}(k-2)) := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(\overline{L}(k-2))$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},2,Np} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p))$$

Soit T dans la $\mathbb{F}_p$-algèbre de Hecke pour $S_2(\Gamma_1(Np), \mathbb{C})$.

- Si T est zéro sur $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p)(k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $J_1(Np)(\mathbb{C})[p](k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $\mathcal{J}[p](k-2)$.

Géométrie complexe $\to$ géométrie mod p

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}(\overline{L}(k-2)) := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(\overline{L}(k-2))$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},2,Np} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p))$$

Soit T dans la $\mathbb{F}_p$-algèbre de Hecke pour $S_2(\Gamma_1(Np), \mathbb{C})$.

- Si T est zéro sur $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p)(k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $J_1(Np)(\mathbb{C})[p](k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $\mathcal{J}[p](k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $\overline{\mathcal{J}}[p](k-2)$.

Géométrie complexe $\to$ géométrie mod p

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}(\overline{L}(k-2)) := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(\overline{L}(k-2))$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},2,Np} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p))$$

Soit T dans la $\mathbb{F}_p$-algèbre de Hecke pour $S_2(\Gamma_1(Np), \mathbb{C})$.

- Si T est zéro sur $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p)(k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $J_1(Np)(\mathbb{C})[p](k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $\mathcal{J}[p](k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $\overline{\mathcal{J}}[p](k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $\mathrm{Cot}_0(\overline{\mathcal{J}}[p])(k-2) = \overline{L}(k-2)$.

Géométrie complexe $\to$ géométrie mod p

$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}(\overline{L}(k-2)) := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(\overline{L}(k-2))$

$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},2,Np} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p))$

Soit T dans la $\mathbb{F}_p$-algèbre de Hecke pour $S_2(\Gamma_1(Np), \mathbb{C})$.

- Si T est zéro sur $H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(Np), \mathbb{F}_p)(k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $J_1(Np)(\mathbb{C})[p](k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $\mathcal{J}[p](k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $\overline{\mathcal{J}}[p](k-2)$.
- Alors, T est zéro sur $\mathrm{Cot}_0(\overline{\mathcal{J}}[p])(k-2) = \overline{L}(k-2)$.

$\Rightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},2,Np} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}(\overline{L}(k-2))$.

Démonstration

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{mod},k,N} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(S_k(\Gamma_1(N), \overline{\mathbb{F}_p}))$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},k,N} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2}))$$

Démonstration

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{mod},k,N} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(S_k(\Gamma_1(N), \overline{\mathbb{F}_p}))$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},k,N} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2}))$$

Facile : $\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{mod},k,N} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},k,N}$.

On veut alors que cela soit un isomorphisme.

Démonstration

$$\mathbb{T}^{\text{mod},k,N}_{\mathbb{F}_p} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(S_k(\Gamma_1(N), \overline{\mathbb{F}_p}))$$

$$\mathbb{T}^{\text{par},k,N}_{\mathbb{F}_p} := \mathbb{F}_p[T_n | n \in \mathbb{N}] < \mathrm{End}(H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p[X,Y]_{k-2}))$$

Facile : $\mathbb{T}^{\text{mod},k,N}_{\mathbb{F}_p} \twoheadrightarrow \mathbb{T}^{\text{par},k,N}_{\mathbb{F}_p}$.

On veut alors que cela soit un isomorphisme.

On a le diagramme commutatif de $\mathbb{F}_p$-algèbres

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}(\overline{L}(k-2)) \arrow[r, tail] & \mathbb{T}^{\text{mod},k,N}_{\mathbb{F}_p} \arrow[d, two heads] & \times & \mathbb{T}^{\text{mod},p+3-k,N,[k-2]}_{\mathbb{F}_p} \arrow[d, two heads] \\
\mathbb{T}^{\text{par},2,Np}_{\mathbb{F}_p} \arrow[u, two heads] \arrow[r] & \mathbb{T}^{\text{par},k,N}_{\mathbb{F}_p} & \times & \mathbb{T}^{\text{par},p+3-k,N,[k-2]}_{\mathbb{F}_p}.
\end{tikzcd}$$

Démonstration

Soit $\mathfrak{P}_f \lhd \mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},2,Np}$ l'idéal maximal correspondant à une forme ordinaire ($a_p \neq 0$) et normalisée ($a_1 = 1$)

$$f \in S_k(\Gamma_1(N), \overline{\mathbb{F}_p})$$

Alors, on a

$$(S_{p+3-k}(\Gamma_1(N), \overline{\mathbb{F}_p})[k-2])_{\mathfrak{P}_f} = 0$$

et aussi

$$(H^1_{\text{par}}(\Gamma_1(N), \mathbb{F}_p[X,Y]_{(p+3-k)-2})[k-2])_{\mathfrak{P}_f} = 0.$$

Démonstration

Alors, on a le diagramme commutatif de $\mathbb{F}_p$-algèbres

$$\begin{tikzcd}
\left(\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}(\overline{L}(k-2))\right)_{\mathfrak{P}_f} \arrow[r, "\cong"] & \left(\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{mod},k,N}\right)_{\mathfrak{P}_f} \arrow[d, two heads] \\
\left(\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},2,Np}\right)_{\mathfrak{P}_f} \arrow[u, two heads] \arrow[r, "\cong"] & \left(\mathbb{T}_{\mathbb{F}_p}^{\text{par},k,N}\right)_{\mathfrak{P}_f}.
\end{tikzcd}$$

Toutes les flèches sont des isomorphismes. $\square$

Merci !