Seminar zur Catalanschen Vermutung, Regensburg, Sommersemester 2006

Hinweise zu Vortrag 2, Gabor Wiese, 3. April 2006

Der Dirichletsche Einheitensatz wurde in der Vorlesung “Algebraische Zahlentheorie” noch nicht behandelt. Dennoch benutzen wir folgende schwache Form, die wir bis zur entsprechenden Vorlesungsstunde “glauben” wollen.

> Sei $d > 1$ quadratfrei und sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dessen Ring der ganzen Zahlen wir mit $\mathcal{O}$ bezeichnen. Dann gibt es $\eta \in \mathcal{O}$, so dass $\mathcal{O}^\times \cong \langle -1 \rangle \times \langle \eta \rangle$ als abelsche Gruppen.

Beweis von Aufgabe 3.1(ii). Zunächst ist $\mathbb{Z}[\sqrt{y}] \subset \mathcal{O}$, also $\mathbb{Z}[\sqrt{y}]^\times \subset \mathcal{O}^\times$. Mit dem obigen Spezialfall des Dirichletschen Einheitensatzes folgt daher, dass

$$\mathbb{Z}[\sqrt{y}]^\times = \langle -1 \rangle \times \langle \epsilon \rangle$$

für eine Einheit ϵ. Wir zeigen nun, dass $\epsilon = u + \sqrt{y}$ angenommen werden kann. Es ist unmittelbar klar, dass $u + \sqrt{y}$ eine Einheit ist: $(u + \sqrt{y})(u - \sqrt{y}) = u^2 - y = 1$.

Zunächst wissen wir aber nur, dass $\epsilon = va + wb\sqrt{y}$ für irgendwelche $a > 0, b > 0$, $v = \pm 1, w = \pm 1$ und $u + \sqrt{y} = \pm \epsilon^l$ für ein l. Wir werden jetzt den Koeffizienten vor $\sqrt{y}$ näher unter die Lupe nehmen und berechnen ϵ^l.

$$(va + wb\sqrt{y})^l = \big(\pm \sum_{i=0 \text{ gerade}}^{l} \binom{l}{i} a^{l-i} b^i y^{i/2} \big) + \sqrt{y} \big(\pm \sum_{i=0 \text{ ungerade}}^{l} \binom{l}{i} a^{l-i} b^i y^{(i-1)/2} \big).$$

Offenbar ist $\sum_{i=0 \text{ ungerade}}^{l} \binom{l}{i} a^{l-i} b^i y^{(i-1)/2}$ größer als 1 für alle $l \geq 2$ (bereits der Term für $i = 1$ liefert mindestens l). Daher gilt $l = 1$ und wir sind fertig. $\square$

Zum Beweis von Lemma 3.3. Auf S. 10, Zeile 8 von unten, scheint es mir nicht klar zu sein, warum $b > 0$ angenommen werden darf, denn wir haben ja in Lemma 3.1 schon von unserem Wahlrecht für x Gebrauch gemacht. Wir können aber auch anders schließen:

Es ist elementar einzusehen, dass a und b dasselbe Vorzeichen haben, nämlich das von $x - 1$. Dazu betrachtet man einfach $x - 1 = 2^{q-1} a^q$ und $x + 1 = 2b^q$. Ist das Vorzeichen positiv, so liefert der “Quadrattrick” im Text $a \geq b - 1/2$. Ist es negativ, dann erhält man mit demselben Trick $|a| \geq |b| + 1/2$. Dieses führt man wie im Text angegeben mit $|a|^q < |b|^q$ zum Widerspruch. $\square$