<u>Seminar zur Catalanschen Vermutung, Regensburg, Sommersemester 2006</u>

Hinweise zu Vortrag 3, Gabor Wiese, 24. April 2006

Den Satz 4.1 kann man auch beweisen, ohne den Körper $\mathbb{Q}_3$ der 3-adischen Zahlen zu kennen, der in der Vorlesung noch nicht behandelt worden ist.

Führe die 3-Bewertung einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ ein. Das geht wie folgt. Ist $a = 3^r c$ mit $3 \nmid c$ eine ganze Zahl, so ist $\mathrm{ord}_3(a) =: r$ die 3-Bewertung von a. Wir setzen $\mathrm{ord}_3(\frac{a}{b}) := \mathrm{ord}_3(a) - \mathrm{ord}_3(b)$. Übrigens ist die 3-Bewertung von 0 definitionsgemäß ∞.

Behandele nun die Aufgabe 4.2 (Achtung: es muss dort heißen "strictly smaller"). (Die Aufgabe 4.1 ist Analysis 1 und mehr oder weniger trivial. Wir setzen sie also voraus.)

Zeige, dass die (Absolut-)Norm des Elementes $a + b2^{1/3} \in \mathbb{Q}(2^{1/3})$ gleich $a^3 + 2b^3$ ist. Folgere, dass $\eta := 2^{1/3} - 1$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[2^{1/3}]$ ist.

Beweis von Satz 4.1. Zum Beweis von Satz 4.1 unterscheiden wir zwei Fälle, nämlich $n < 0$ und $n \geq 0$.

Der erste Fall ist elementar und kann mittels Induktion bewiesen werden. Genauer beweisen wir, dass alle Koeffizienten von $(\eta^{-1})^n$ für $n > 0$ positiv und ungleich null sind. Für $n = 1$ rechnet man unmittelbar nach, dass $\eta^{-1} = 1 + 2^{1/3} + 4^{1/3}$ gilt. Der Induktionsschluss folgt sofort aus

$$(1 + 2^{1/3} + 4^{1/3})^n = (1 + 2^{1/3} + 4^{1/3})(1 + 2^{1/3} + 4^{1/3})^{n-1}.$$

Für den Fall $n \geq 0$ gehen wir jetzt den Beweis von Satz 4.1 Schritt für Schritt durch und machen ein paar Änderungen. Setze $\pi := 1 + 2^{1/3}$. Ignoriere den Satz über das Primideal. Berechne die Tabelle 1 ohne die Spalte für die 5. Die drei Zeilen unter der Tabelle können wir so stehen lassen. Ersetze in allen folgenden Formeln ∞ durch n. Da wir nur ganze $n \geq 0$ betrachten, gibt es keinen Grund π-adisch zu entwickeln, weil die Summe endlich ist. Wir haben also

$$(-\frac{\eta}{2})^n = (1 - \frac{\pi}{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\frac{\pi}{2})^k.$$

Der $4^{1/3}$-Koeffizient jeden Termes ist wie angegeben. Summieren wir diesen für $k = 0, 1, \ldots, n$ auf, so erhalten wir in der Tat den $4^{1/3}$-Koeffizient von $(-\frac{\eta}{2})^n$. Unter der Annahme des Satzes haben wir dann die nächste hervorgehobene Formel, aber mit n anstelle von ∞. Auch die darauf folgende hervorgehobene Formel bleibt richtig mit n statt ∞. In dieser endlichen Summe kommen nur rationale Zahlen vor, daher können wir ihre 3-Bewertung nehmen. Die Aufgabe 4.2

zusammen damit, dass die c_k durch $3^{[\frac{k}{3}]}$ teilbar sind, ergibt, dass die 3-Bewertung von

$$\sum_{k=5}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2} (-\frac{1}{2})^k c_k$$

mindestens 1 ist. Daraus folgt nun, dass die 3-Bewertung von

$$\sum_{k=2}^{4} \frac{1}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2} (-\frac{1}{2})^k c_k$$

auch mindestens 1 ist. Dies liefert aber den gewünschten Widerspruch. $\square$

Die Aufgabe 2.2 sollte schon im vorigen Vortrag behandelt worden sein. Löse nun die Aufgabe 6.4 (das ist die, die im Text 3.4 genannt wird). In der Formulierung dieser Aufgabe muss es allerdings $|x| < |y|$ (anstatt $\leq$) heißen, da $y = -x$ bei geradem n ein Gegenbeispiel ergibt (bemerkt von Florian Klössinger). Löse anschließend Aufgabe 4.5. Achtung: Es muss $2^{1/3} - 1$ und nicht $1 + 2^{1/3}$ heißen (an drei Stellen).

Der Beweis des Satzes 4.2 sollte nun einfach sein.

Dies ist nur ein Vorschlag. Ihr dürft gerne die Reihenfolge der Darstellung verändern und zum Beispiel mit Satz 4.2 anfangen und erst im Anschluss die benötigten Fakten zur Einheitengruppe beweisen.